

Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 07 – Sistemas Baseados em Regras.
Aplicação 2: Backing Up a Truck.



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Sistemas baseados em regras *fuzzy* constituem uma poderosa ferramenta com aplicações em diversas áreas incluindo:

- Automação e controle.
- Previsão de séries temporais.
- Reconhecimento de padrões.
- Biomatemática.

Aspectos positivos de sistemas baseados em regras *fuzzy* incluem:

- Capacidade de aproximação universal e forte fundamento matemático.
- Fácil interpretação e implementação por não-matemáticos e alta interoperabilidade.

Exemplo: Backing Up a Truck

Objetivo:

Estacionar um caminhão num determinado local de um pátio efetuando apenas movimentos para trás e parando com um ângulo de 90° entre o caminhão e o eixo horizontal.

Formulação e Variáveis do Problema:

Determinamos o ângulo θ que as rodas formam com o eixo principal do veículo quando esse se encontra na posição (x, y) e forma um ângulo ϕ com respeito ao eixo horizontal.

- Variáveis independentes: Posição (x, y) e o ângulo ϕ com a horizontal.
- Variável dependente: Ângulo θ das rodas com o eixo do veículo.

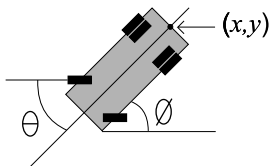
Formalmente, conhecidos a posição (x, y) e os ângulos ϕ e θ , determinamos a nova posição (x', y') e o novo ângulo ϕ' através

$$\phi' = \phi + \theta,$$

$$x' = x + d \cos(\phi'),$$

$$y' = y + d \sin(\phi'),$$

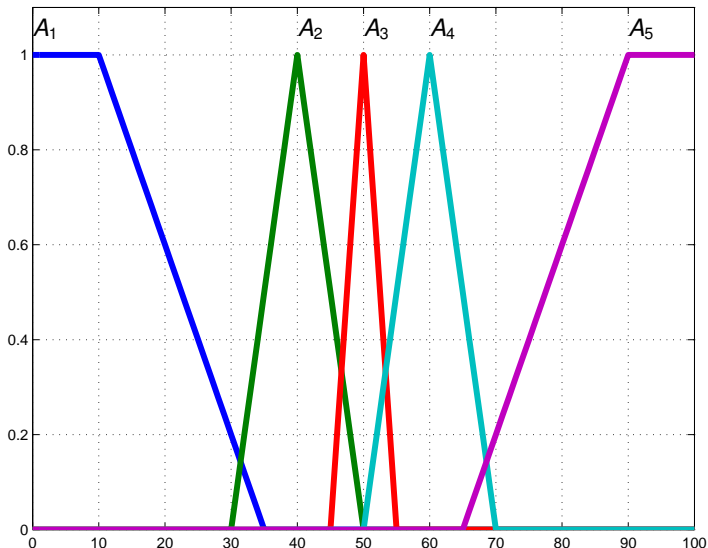
em que d é a distância percorrida pelo caminhão a cada intervalo de tempo.



Hipóteses Adicionais

- Supomos que existe uma área suficiente entre o veículo e a vaga de modo que podemos desprezar a coordenada y .
As variáveis de estado são x e ϕ .
- A saída do controlador é $\theta \in [-30^\circ, 30^\circ]$.
- O estacionamento corresponde a um plano $[0, 100] \times [0, 100]$ e a posição final (x_f, y_f) é $(50, 100)$.
- Supomos também que o veículo se desloca $d = 1\text{ m}$ a cada intervalo de tempo.

Antecedente: Posição x



Em termos matemáticos, tem-se:

$$A_1(x) = \text{Trap}(x; -10, 0, 10, 35),$$

$$A_2(x) = \text{Trap}(x; 30, 40, 40, 50),$$

$$A_3(x) = \text{Trap}(x; 45, 50, 50, 55),$$

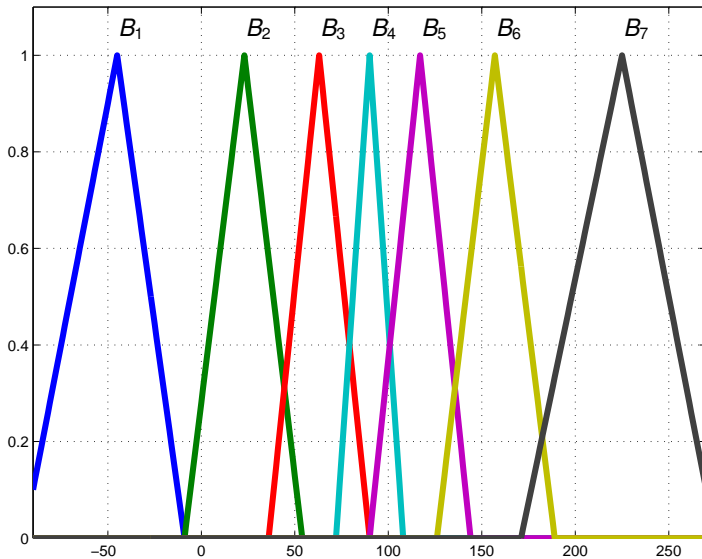
$$A_4(x) = \text{Trap}(x; 50, 60, 60, 70),$$

$$A_5(x) = \text{Trap}(x; 65, 90, 100, 110),$$

em que

$$\text{Trap}(x; a, m, n, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \left(\frac{x - a}{m - a} \right), \left(\frac{b - x}{b - n} \right) \right\} \right\}.$$

Antecedente: Ângulo ϕ



Em termos matemáticos, tem-se:

$$B_1(\phi) = \text{Tri}(\phi; -95, -45, 9),$$

$$B_2(\phi) = \text{Tri}(\phi; -9, 23, 54),$$

$$B_3(\phi) = \text{Tri}(\phi; 36, 63, 90),$$

$$B_4(\phi) = \text{Tri}(\phi; 72, 90, 108),$$

$$B_5(\phi) = \text{Tri}(\phi; 90, 117, 144),$$

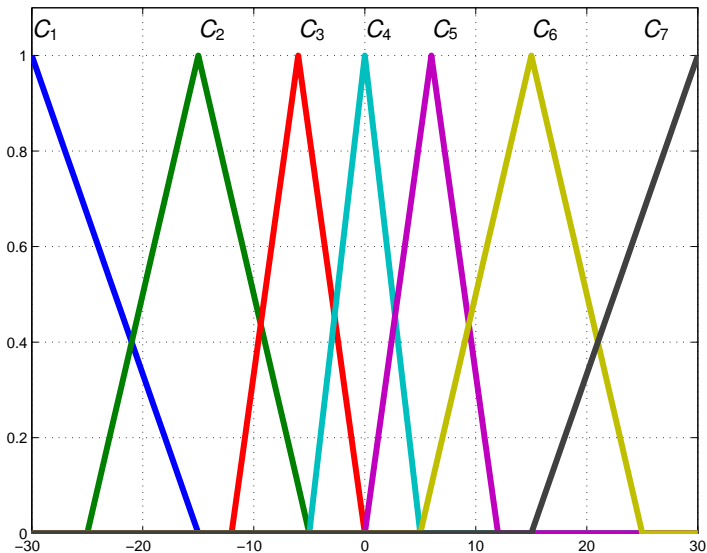
$$B_6(\phi) = \text{Tri}(\phi; 126, 157, 189),$$

$$B_7(\phi) = \text{Tri}(\phi; 171, 225, 275),$$

em que

$$\text{Tri}(x; a, m, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \left(\frac{x - a}{m - a} \right), \left(\frac{b - x}{b - m} \right) \right\} \right\}.$$

Consequente: $\hat{\text{Ângulo}} \theta$



Em termos matemáticos, tem-se:

$$C_1 = \text{Tri}(\phi; -45, -30, -15),$$

$$C_2 = \text{Tri}(\phi; -25, -15, -5),$$

$$C_3 = \text{Tri}(\phi; -12, -6, 0),$$

$$C_4 = \text{Tri}(\phi; -5, 0, 5),$$

$$C_5 = \text{Tri}(\phi; 0, 6, 12),$$

$$C_6 = \text{Tri}(\phi; 5, 15, 25),$$

$$C_7 = \text{Tri}(\phi; 15, 30, 45),$$

em que

$$\text{Tri}(x; a, m, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \left(\frac{x - a}{m - a} \right), \left(\frac{b - x}{b - m} \right) \right\} \right\}.$$

Base de Regras *Fuzzy*

- SE x é A_1 e ϕ é B_1 , ENTÃO θ é C_5 .
- \vdots
- SE x é A_3 e ϕ é B_4 , ENTÃO θ é C_4 .
- \vdots
- SE x é A_5 e ϕ é B_7 , ENTÃO θ é C_1 .

Base de Regras *Fuzzy*

		x				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1		C_5	C_6	C_6	C_7	C_7
B_2		C_3	C_5	C_6	C_7	C_7
B_3		C_2	C_3	C_5	C_6	C_7
ϕ B_4		C_2	C_2	C_1	C_6	C_6
B_5		C_1	C_2	C_3	C_5	C_6
B_6		C_1	C_1	C_2	C_3	C_5
B_7		C_1	C_1	C_2	C_2	C_3

Observe que temos 35 ($=7 \times 5$) regras no total.

Método de Inferência de Mamdani

Dados a posição x e o ângulo ϕ do veículo com a horizontal, determinamos o ângulo θ da seguinte forma:

1. **Passo 1:** Calculamos a ativação de cada regra como segue:

$$w_{ij} = A_i(x) \wedge B_j(\phi), \quad \forall i = 1, \dots, 5 \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, 7.$$

2. **Passo 2:** O conjunto *fuzzy* do ângulo θ é dado pela união

$$C = \bigcup_{i=1}^5 \bigcup_{j=1}^7 (w_{ij} \wedge C_{\xi(i,j)}),$$

em que $\xi(i, j)$ é obtido considerando a tabela da base de regras da página anterior.

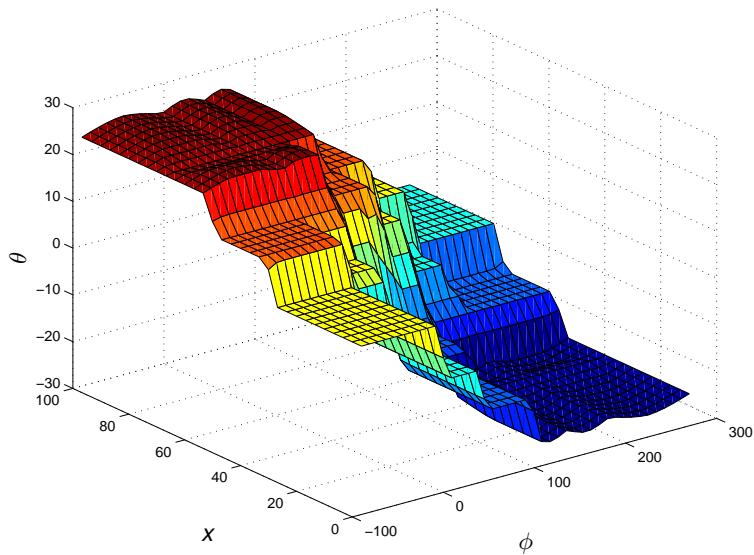
Passo 3 – Defuzzificação

O conjunto *fuzzy* C pode ser transformado em um número real θ^* usando o **centro de área**, também chamado **centroide**, da seguinte forma:

$$\theta^* = \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k C(\theta_k)}{\sum_{j=1}^n C(\theta_k)},$$

em que $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n$ é uma partição do intervalo $[-30, 30]$.

Gráfico do Problema Backing-up a Truck



Implementação Computacional

Suponha que queremos resolver um problema envolvendo:

- Duas variáveis independentes $x \in X$ e $y \in Y$ e
 - Uma única variável dependente $z \in Z$.
-

Primeiro, com o auxílio de um especialista, particionamos o universo de discurso X em M conjuntos *fuzzy* $A_1, \dots, A_M \in \mathcal{F}(X)$.

Analogamente, particionamos Y e Z usando conjuntos *fuzzy* $B_1, \dots, B_N \in \mathcal{F}(Y)$ e $C_1, \dots, C_K \in \mathcal{F}(Z)$, respectivamente.

Estabelecemos depois uma base de regras da forma

- **SE** x é A_1 **E** y é B_1 **ENTÃO** y é $C_{\xi(1,1)}$.
- ⋮
- **SE** x é A_m **E** y é B_n **ENTÃO** y é $C_{\xi(m,n)}$.
- ⋮
- **SE** x é A_M **E** y é B_N **ENTÃO** y é $C_{\xi(M,N)}$.

em que $\xi(m, n) \in \{1, \dots, K\}$ fornece o índice do conjunto *fuzzy* do conseqüente de cada regra.

A base de regras pode ser organizada numa matriz ξ de dimensão $M \times N$ com valores em $\{1, 2, \dots, K\}$.

Algoritmo 1: Método de Inferência de Mamdani e Centroide

Dados: Conjuntos *fuzzy* $A_1, \dots, A_M \in \mathcal{F}(X)$, $B_1, \dots, B_N \in \mathcal{F}(Y)$ e $C_1, \dots, C_K \in \mathcal{F}(Z)$ para os antecedentes e consequentes. Matriz ξ com a base de regras e uma partição z_1, \dots, z_L de Z para o método de defuzzificação.

Entrada: Valores x e y das variáveis independentes.

Saída: Valor z e conjunto *fuzzy* C da variável dependente.

Inicialize $C = \text{zeros}(L, 1)$;

para $i = 1 : M$ **faça**

para $j = 1 : N$ **faça**

$$w_{ij} = A_i(x) \wedge B_j(x);$$

$$C = \max \left\{ C, \min \left\{ w_{ij}, C_{\xi(i,j)}([z_1, \dots, z_L]) \right\} \right\};$$

$$z = \frac{\sum_{\mu=1}^L z_{\mu} C(z_{\mu})}{\sum_{\nu=1}^L C(z_{\nu})}.$$

Obs.: $C_{\xi(i,j)}([z_1, \dots, z_L]) = [C_{\xi(i,j)}(z_1), \dots, C_{\xi(i,j)}(z_L)]^T$.

Considerações Finais

Na aula de hoje vimos mais uma aplicação de um sistema baseado em regras *fuzzy*: o problema “Backing up a truck”.

Destacamos também como é feita a implementação computacional do método de inferência de Mamdani.

Na próxima aula, apresentaremos o método de inferência de Takagi-Sugeno, que não envolve uma etapa de defuzzificação.

Muito grato pela atenção!