

Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 06 – Sistemas Baseados em Regras.
Aplicação 1: Máquina de Lavar Roupas



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Sistemas baseados em regras *fuzzy* constituem uma poderosa ferramenta com aplicações em diversas áreas incluindo:

- Automação e controle.
- Previsão de séries temporais.
- Reconhecimento de padrões.
- Biomatemática.

Aspectos positivos dos sistemas baseados em regras *fuzzy* incluem:

- Capacidade de aproximação universal e forte fundamento matemático.
- Fácil interpretação e implementação por não-matemáticos e alta interoperabilidade.

Exemplo: Lava Roupas

Objetivo:

Automatizar o funcionamento de uma máquina de lavar roupas de modo a economizar água, eletricidade, detergente, etc.

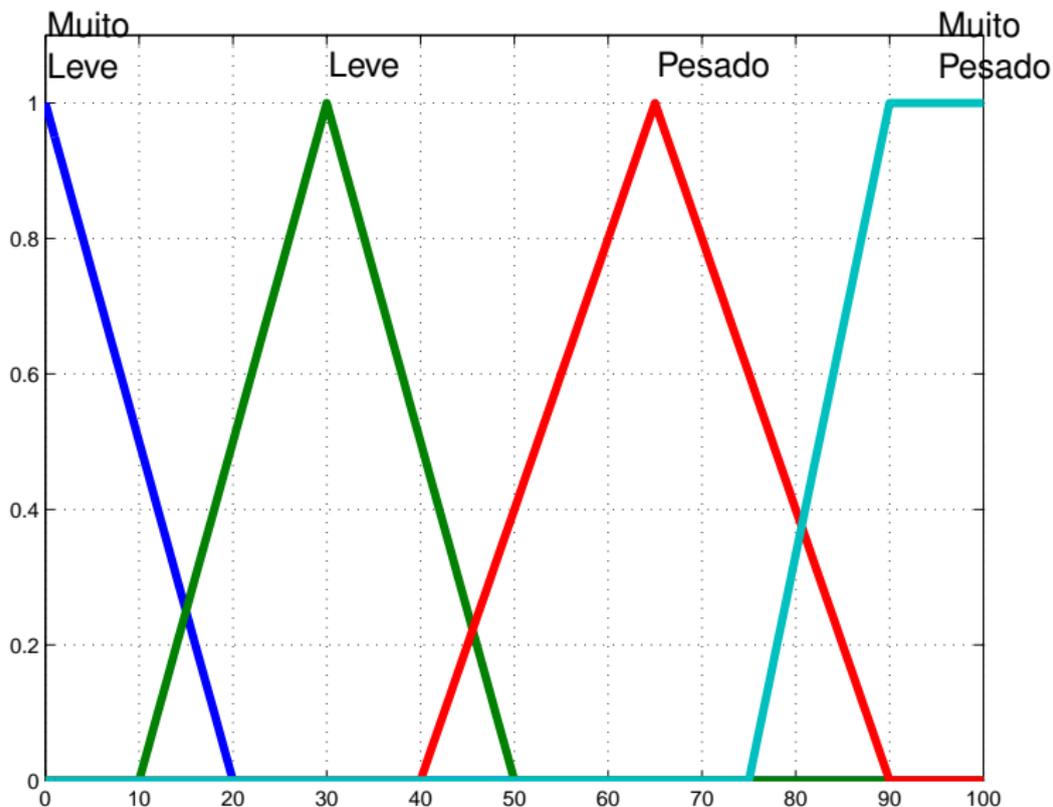
Formulação e Variáveis do Problema:

Conhecido o peso aproximado das roupas e quão sujas elas estão, determinaremos a quantidade de detergente a ser aplicada.

- Variáveis independentes: Peso e sujeira.
- Variável dependente: Quantidade de detergente.

Primeiramente, definiremos conjuntos *fuzzy* para as variáveis independentes.

Fuzzificação - Peso



Em termos matemáticos, tem-se:

$$\varphi_{\text{Muito Leve}}(p) = \text{Trap}(p; -20, -10, 0, 20),$$

$$\varphi_{\text{Leve}}(p) = \text{Trap}(p; 10, 30, 30, 50),$$

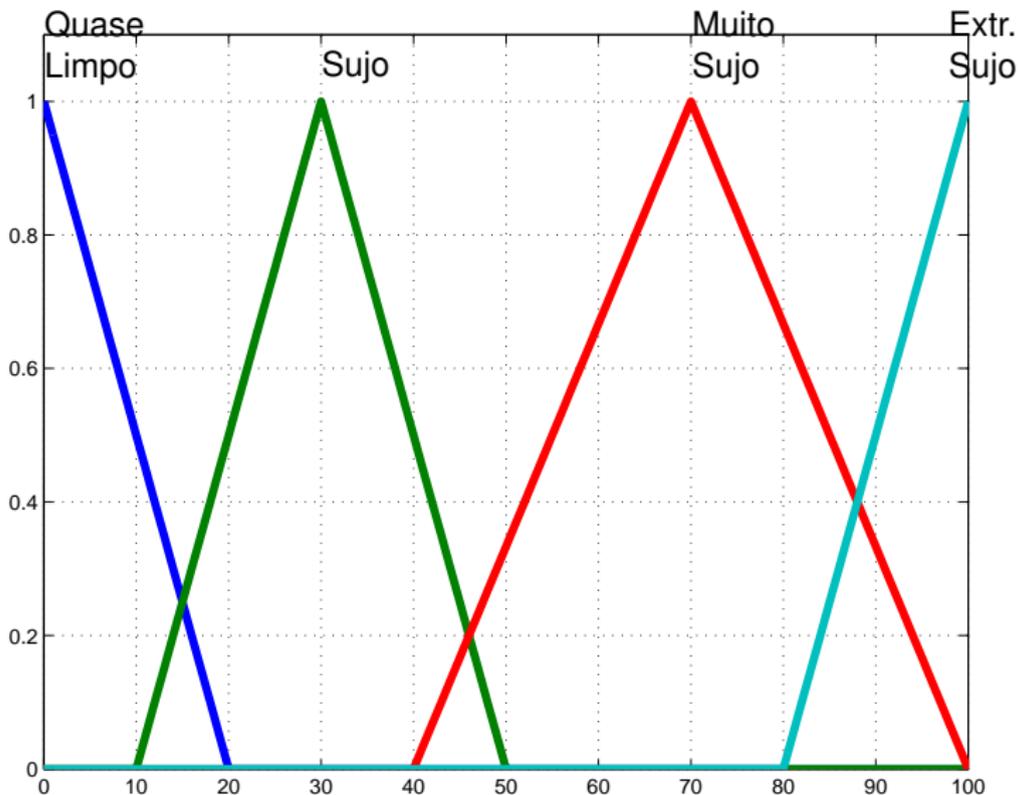
$$\varphi_{\text{Pesado}}(p) = \text{Trap}(p; 40, 65, 65, 90),$$

$$\varphi_{\text{Muito Pesado}}(p) = \text{Trap}(p; 75, 90, 100, 120),$$

em que

$$\text{Trap}(x; a, m, n, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \left(\frac{x - a}{m - a} \right), \left(\frac{b - x}{b - n} \right) \right\} \right\}.$$

Fuzzificação - Sujeira



Em termos matemáticos, tem-se:

$$\varphi_{\text{Quase Limp}}(\mathbf{s}) = \text{Tri}(\mathbf{s}; -20, 0, 20),$$

$$\varphi_{\text{Sujo}}(\mathbf{s}) = \text{Tri}(\mathbf{s}; 10, 30, 50),$$

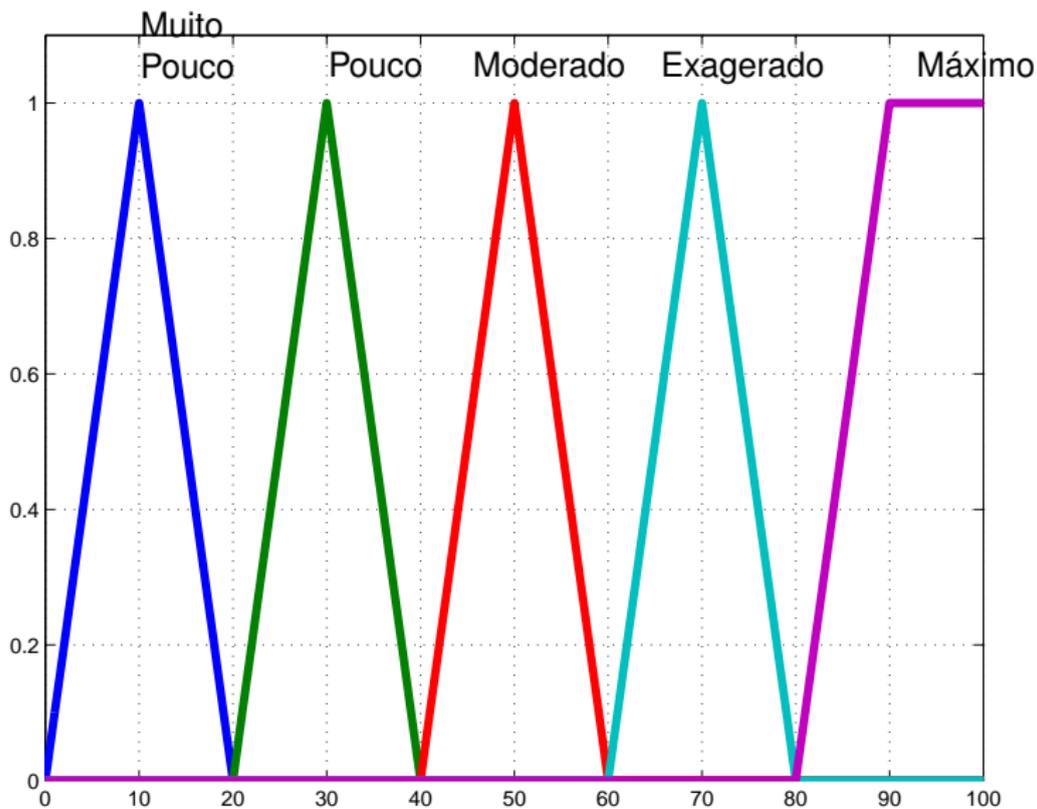
$$\varphi_{\text{Muito Sujo}}(\mathbf{s}) = \text{Tri}(\mathbf{s}; 40, 70, 100),$$

$$\varphi_{\text{Extr. Sujo}}(\mathbf{s}) = \text{Tri}(\mathbf{s}; 80, 100, 120),$$

em que

$$\text{Tri}(x; a, m, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \left(\frac{x - a}{m - a} \right), \left(\frac{b - x}{b - m} \right) \right\} \right\}.$$

Consequente: Quantidade de detergente



Em termos matemáticos, tem-se:

$$\varphi_{\text{Muito Pouco}}(q) = \text{Trap}(q; 0, 10, 10, 20),$$

$$\varphi_{\text{Pouco}}(q) = \text{Trap}(q; 20, 30, 30, 40),$$

$$\varphi_{\text{Moderado}}(q) = \text{Trap}(q; 40, 50, 50, 60),$$

$$\varphi_{\text{Exagerado}}(q) = \text{Trap}(q; 60, 70, 70, 80),$$

$$\varphi_{\text{Máximo}}(q) = \text{Trap}(q; 80, 90, 100, 120).$$

Base de Regras *Fuzzy*

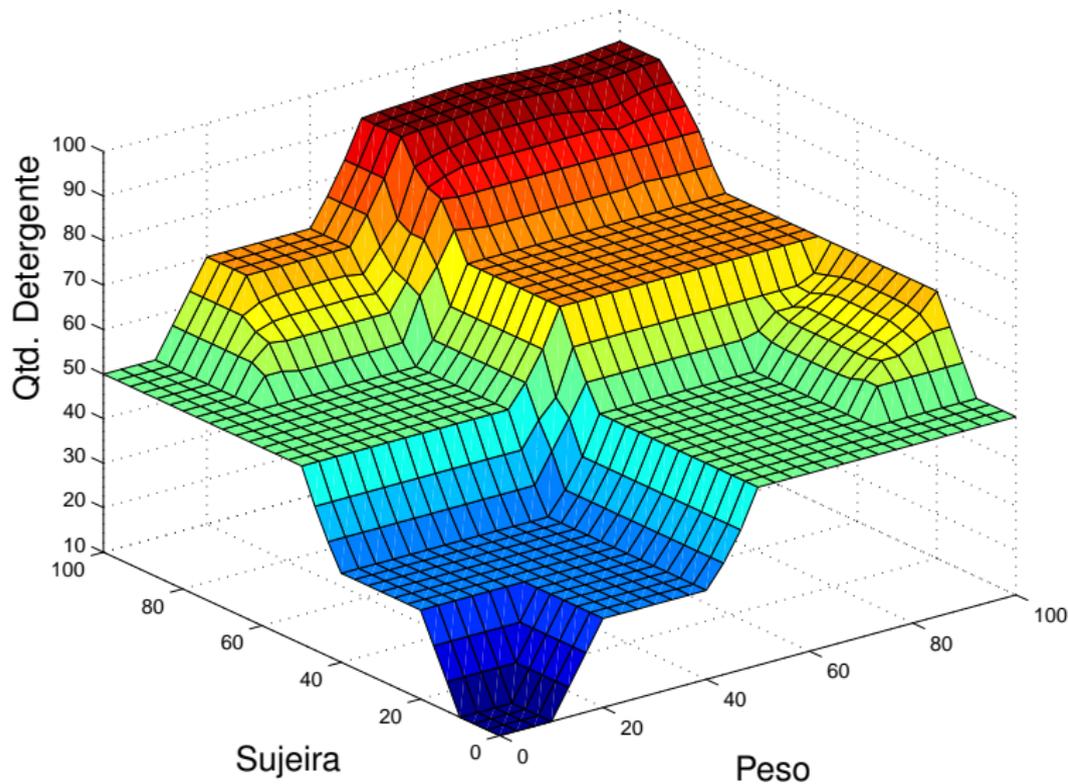
- SE o peso é **muito leve** e a sujeira é **quase limpo**,
ENTÃO a quantidade de detergente é **muito pouco**.
- SE o peso é **muito leve** e a sujeira é **sujo**,
ENTÃO a quantidade de detergente é **pouco**.
- \vdots
- SE o peso é **pesado** e a sujeira é **muito sujo**,
ENTÃO a quantidade de detergente é **exagerado**.
- \vdots
- SE o peso é **muito pesado** e a sujeira é **extremamente sujo**,
ENTÃO a quantidade de detergente é **máximo**.

Base de Regras *Fuzzy*

	Quase limpo	Sujo	Muito sujo	Extr. sujo
Muito leve	Muito pouco	Pouco	Moderado	Moderado
Leve	Pouco	Pouco	Moderado	Exagerado
Pesado	Moderado	Moderado	Exagerado	Exagerado
Muito Pesado	Moderado	Exagerado	Máximo	Máximo

Observe que temos 16 regras no total.

Gráfico da Máquina de Lavar Roupas



Método de Inferência

Dado que o peso é $p = 10$ e o nível de sujeira é $s = 15$, determinamos a quantidade de detergente da seguinte forma:

Calculamos a ativação de cada regra da seguinte forma:

$$w_i = \varphi_{A_{1i}}(p) \wedge \varphi_{A_{2i}}(s), \quad \forall i = 1, \dots, 16.$$

Por exemplo, a ativação da primeira regra é:

$$w_1 = \varphi_{\text{Muito Leve}}(p) \wedge \varphi_{\text{Quase Limpo}}(s) = 0.5 \wedge 0.25 = 0.25.$$

Analogamente, a ativação da segunda regra é:

$$w_2 = \varphi_{\text{Muito Leve}}(p) \wedge \varphi_{\text{Sujo}}(s) = 0.5 \wedge 0.25 = 0.25.$$

Todas as outras regras tem ativação nula, ou seja, $w_i = 0$ para $i = 3, \dots, 16$.

O conjunto *fuzzy* da quantidade de detergente é determinado através da união dos conjuntos *fuzzy* obtidos tomando o mínimo entre w_i e a função de pertinência do conseqüente da regra, ou seja,

$$\varphi_{\text{Qtd. Deter.}} = \bigcup_{i=1}^{16} (w_i \wedge \varphi_{Q_i}),$$

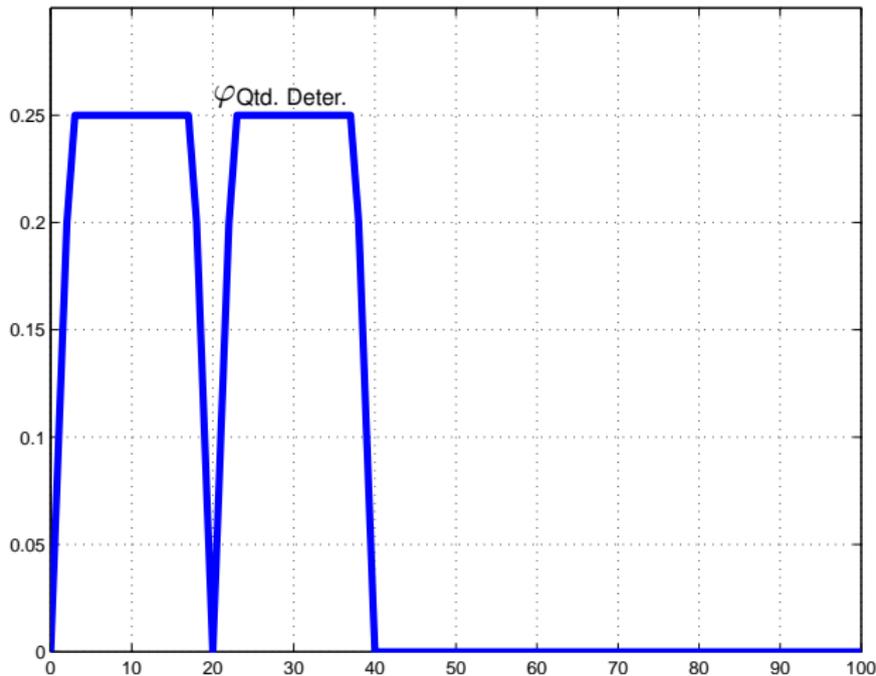
em que $Q_i \in \{\text{Muito Pouco, Pouco, Moderado, Exagerado, Máximo}\}$.

Este é um exemplo do método de inferência de Mamdani!

Neste exemplo,

$$\varphi_{\text{Qtd. Deter.}} = (0.25 \wedge \varphi_{\text{Muito Pouco}}) \cup (0.25 \wedge \varphi_{\text{Pouco}}),$$

cuja função de pertinência, obtida usando o máximo, é



Defuzzificação

Finalmente, transformamos o conjunto *fuzzy* que representa a quantidade de detergente em um valor real. Esse processo é chamado defuzzificação.

Defuzzificação

O conjunto *fuzzy* $\varphi_{\text{Qtd. Deter.}}$ pode ser transformado em um número real usando o **centro de área**, também chamado **centroide**, dado por

$$q^* = \frac{\int q \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q) dq}{\int \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q) dq}.$$

No caso discreto, temos

$$q^* = \frac{\sum_{j=1}^n q_j \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q_j)}{\sum_{j=1}^n \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q_j)}.$$

Neste exemplo, considerando o peso é $p = 10$, o nível de sujeira é $s = 15$ e assumindo que

$$q \in \{0, 10/3, 2 \times 10/3, \dots, 29 \times 10/3, 100\},$$

encontramos

$$q^* = \frac{\sum_{j=1}^n q_j \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q_j)}{\sum_{j=1}^n \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q_j)} = \frac{50}{5/2} = 20.$$

Conclusão: Sistemas Baseados em Regas *Fuzzy*

Um sistema baseado em regras *fuzzy* contém três componentes:

- **Dicionário**, que define conjuntos *fuzzy* sobre as variáveis.
- **Base de regras**, que estabelece uma relação entre as variáveis.
- **Método de inferência**, usado para determinar a saída dado uma certa entrada.

Eventualmente, pode-se acrescentar uma quarta componente, chamada **defuzzificação**, que transforma uma saída *fuzzy* em um número real ou um conjunto clássico.

Muito grato pela atenção!