Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 05 – O Princípio de Extensão de Zadeh.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Na aula anterior, apresentamos o conceito de número *fuzzy*: um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tal que seus α-níveis $[A]^\alpha$ são todos intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$.

Na aula anterior vimos também como efetuar operações aritméticas com números *fuzzy* usando a álgebra intervalar.

Especificamente, a partir dos α-níveis de dois números *fuzzy* $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, definimos os α-níveis do conjunto *fuzzy* $A \star B$, em que "$\star$" denota uma das quatro operações.

Iniciaremos a aula de hoje descrevendo a função de pertinência de $A \star B$ em termos das funções de pertinência de A e B.

Posteriormente, apresentaremos o princípio de extensão de Zadeh e terminaremos a aula mostrando a relação entre esse princípio e as operações com números *fuzzy*.

Caracterização de Álgebra dos Números *Fuzzy*

Considere números *fuzzy* $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e seja $\star$ uma das quatro operações aritméticas.

Por definição, o número *fuzzy* $A \star B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é tal que

$$[A \star B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \star [B]^{\alpha}.$$

Pelo teorema da representação de números *fuzzy* (Aula 04),

$$(A \star B)(z) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{[A \star B]^{\alpha}}(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Mas, para qualquer $z \in \mathbb{R}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
& \chi_{[A \star B]^\alpha}(z) = 1 \\
\iff \quad & z \in [A \star B]^\alpha \\
\iff \quad & z \in [A]^\alpha \star [B]^\alpha \\
\iff \quad & z \in \{x \star y : x \in [A]^\alpha, y \in [B]^\alpha\} \\
\iff \quad & \exists x_0 \in [A]^\alpha, y_0 \in [B]^\alpha : z = x_0 \star y_0 \\
\iff \quad & \exists x_0, y_0 \in \mathbb{R} : z = x_0 \star y_0, A(x_0) \geq \alpha, B(y_0) \geq \alpha \\
\iff \quad & \exists x_0, y_0 \in \mathbb{R} : z = x_0 \star y_0, \min\{A(x_0), B(y_0)\} \geq \alpha \\
\iff \quad & \sup_{z = x \star y} \min\{A(x), B(y)\} \geq \alpha.
\end{aligned}
$$

Logo, para qualquer $z \in \mathbb{R}$, vale

$$
\begin{aligned}
(A \star B)(z) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{[A\star B]^\alpha}(z) \\
&= \sup \left\{ \alpha : \alpha \leq \sup_{z = x \star y} \min\{A(x), B(y)\} \right\} \\
&= \sup_{z = x \star y} \min\{A(x), B(y)\},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
(A \star B)(z) = \sup_{z = x \star y} \left[A(x) \wedge B(y) \right],
$$

em que

$$
A(x) \wedge B(x) = \min\{A(x), B(x)\},
$$

é o menor valor entre $A(x)$ e $B(x)$.

Teorema 1

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *números fuzzy, para qualquer* $z \in \mathbb{R}$*, tem-se:*

(a) $(A + B)(z) = \sup\limits_{z=x+y} \big[A(x) \wedge B(y)\big].$

(b) $(A - B)(z) = \sup\limits_{z=x-y} \big[A(x) \wedge B(y)\big].$

(c) $(A \cdot B)(z) = \sup\limits_{z=xy} \big[A(x) \wedge B(y)\big].$

(d) $(A/B)(z) = \sup\limits_{z=x/y} \big[A(x) \wedge B(y)\big]$, *dado que* $0 \notin Supp(B)$.

Observação:

Note que a equação

$$(A \star B)(z) = \sup_{z = x \star y} A(x) \wedge B(y),$$

pode ser usada para estender a operação "$\star$" não apenas para números *fuzzy*, mas também para quaisquer conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Com efeito, essa equação é um caso particular do **princípio de extensão de Zadeh**.

Princípio de Extensão de Zadeh

Em termos gerais, o princípio de extensão de Zadeh permite estender conceitos da teoria clássica para a teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Suponha que desejamos estender uma função clássica (*crisp*) contínua $f : U \to V$ para atuar em conjuntos *fuzzy* de U.

Em outras palavras, dado $f : U \to V$, queremos encontrar uma função $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ que coincida com f para conjuntos clássicos.

Primeiramente, dado um conjunto clássico $A \in U$, temos

$$f(A) = \{v \in V : v = f(u), u \in A\}.$$

Em termos da função característica, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\chi_{f(A)}(v) &= \begin{cases} 1, & \exists u \in A : v = f(u), \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \sup_{u:f(u)=v} \chi_A(u) = 1, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases} \\
&= \sup_{u:f(u)=v} \chi_A(u).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\chi_{f(A)}(v) = \sup_{u:f(u)=v} \chi_A(u).$$

No caso *fuzzy*, a função característica é simplesmente substituída pela função de pertinência!

Definição 2 (Princípio de Extensão e Zadeh)

Seja $f : U \to V$ uma função clássica contínua. A extensão de Zadeh de f é a função $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ que fornece, para qualquer $A \in \mathcal{F}(U)$, o conjunto *fuzzy* $f(A) \in \mathcal{F}(V)$ cuja função de pertinência é

$$\varphi_{f(A)}(v) = \sup_{u:f(u)=v} \varphi_A(u), \quad \forall v \in V,$$

ou, equivalentemente,

$$f(A)(v) = \sup_{u:f(u)=v} A(u), \quad \forall v \in V.$$

Observação – Supremo do Conjunto Vazio

$$\sup \emptyset = 0.$$

Com efeito, o supremo de um conjunto $S \subseteq [0, 1]$ é a menor cota superior de S.

Se $S = \emptyset$, então qualquer $x \in [0, 1]$ é uma cota superior de S.

Portanto, a menor cota superior é 0.

Exemplo 3

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$ dada por $f(n) = n^2$, em que $\mathbb{Z}^* = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é o conjunto dos inteiros não-negativos. Determine a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}^*)$ aplicada ao conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ dada por

$$A(n) = \begin{cases} 0.5, & n = -1, \\ 1, & n = 0, \\ 0.6, & n = 1, \\ 0.3, & n = 2, \\ \text{caso contrário.} & \end{cases}$$

Exemplo 3

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$ dada por $f(n) = n^2$, em que $\mathbb{Z}^* = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é o conjunto dos inteiros não-negativos. Determine a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}^*)$ aplicada ao conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ dada por

$$A(n) = \begin{cases} 0.5, & n = -1, \\ 1, & n = 0, \\ 0.6, & n = 1, \\ 0.3, & n = 2, \\ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta:

$$\hat{f}(A)(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0.6, & n = 1, \\ 0.3, & n = 4, \\ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 4

Considere $U = [0, 10]$, $V = [0, 100]$ e a função $f : U \to [0, 100]$ a função

$$f(x) = x^2.$$

Determine a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ aplicada ao conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ dado por

$$A(x) = \frac{x}{x+2}.$$

Exemplo 4

Considere $U = [0, 10]$, $V = [0, 100]$ e a função $f : U \to [0, 100]$ a função
$$f(x) = x^2.$$
Determine a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ aplicada ao conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ dado por
$$A(x) = \frac{x}{x+2}.$$

Resposta:
$$\hat{f}(A)(y) = \sup_{x : x^2 = y} A(x) = A(\sqrt{y}).$$

Observação – Princípio de Extensão de uma Bijeção

Se $f : U \to V$ for uma função bijetora, então

$$f(u) = v \quad \Longleftrightarrow \quad v = f^{-1}(u).$$

Nesse caso, a extensão de Zadeh de $f : U \to V$ é dada por

$$\hat{f}(A)(v) = \sup_{u:f(u)=v} A(u) = A(f^{-1}(v)).$$

Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos clássicos A e B, o produto cartesiano $A \times B$ é formado por todos os pares ordenados (a, b) em que $a \in A$ e $b \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad \textbf{e} \quad b \in B\}.$$

Note que o produto cartesiano é formulado usando o conectivo "e" da lógica, ou seja, uma conjunção!

Definição 5 (Produto Cartesiano *Fuzzy*)

Dados dois conjuntos *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ e $B \in \mathcal{F}(V)$, o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto *fuzzy* $A \times B \in \mathcal{F}(U \times V)$ dado por

$$(A \times B)(u,v) = \mathcal{C}\big(A(u), B(v)\big), \quad \forall (u,v) \in U \times V,$$

em que $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ é uma conjunção *fuzzy*.

Na prática, geralmente consideramos uma t-norma no lugar da conjunção *fuzzy*, ou seja,

$$(A \times B)(u,v) = A(u) \vartriangle B(v), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

Caso não seja especificado a t-norma (ou conjunção *fuzzy*), assumiremos que o produto cartesiano é dado pelo **mínimo**, isto é,

$$(A \times B)(u,v) = A(u) \wedge B(v), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

Extensão das Operações Aritméticas

Dada uma operação aritmética "$\star$", defina a função $f : U \to V$ através da equação

$$f(x, y) = x \star y,$$

em que $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}$.

Agora, dados dois conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ (em particular, A e B podem ser números *fuzzy*), considere o produto cartesiano $A \times B \in \mathcal{F}(U)$ usando o mínimo.

Assim, pelo princípio de extensão de Zadeh, temos

$$\begin{aligned} \hat{f}(A, B)(z) &= \sup_{(x,y): f(x,y)=z} (A \times B)(x, y) \\ &= \sup_{(x,y): x \star y = z} A(x) \wedge B(y), \end{aligned}$$

conforme enunciamos no início da aula.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o princípio de extensão de Zadeh, que pode ser usado para estender uma função real contínua para conjuntos *fuzzy*.

Formalmente, definimos a extensão de Zadeh da função contínua $f : U \to V$ como sendo a função $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ dada por

$$f(A)(v) = \sup_{u:f(u)=v} A(u), \quad \forall v \in V.$$

Mostramos, em particular, que as operações aritméticas com números *fuzzy* pode ser definidas usando o princípio de extensão de Zadeh.

Muito grato pela atenção!