Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 04 – Números *Fuzzy* e suas Operações Aritméticas.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

De um modo geral, um **número** contém uma informação quantitativa precisa.

Em muitas situações práticas, porém, um valor numérico é acompanhado de imprecisões causadas, por exemplo, por instrumentos de medida, pelos indivíduos que estão tomando a medida, pelo objeto que está sendo medido, etc.

Nestas situações, no lugar de um número real $a \in \mathbb{R}$, podemos considerar um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ que representa o termo "aproximadamente a" ou "em torno de a".

Esse tipo particular de conjunto *fuzzy* é chamado **número *fuzzy***.

Números *Fuzzy*

Definição 1 (Número *Fuzzy*)

Um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, definido nos reais, é um número *fuzzy* se todos os seus α-níveis são intervalos fechados, limitados e não-vazios.

Denotaremos por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ o conjunto de todos os números *fuzzy*.

Números reais e Intervalos fechados

Observe que todo número real r é um número *fuzzy* cuja função de pertinência é sua função característica

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1, & x = r, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De um modo geral, qualquer intervalo fechado e limitado $[r_I, r_S]$ é um número *fuzzy* cuja função de pertinência é sua função característica

$$\chi_{[r_I, r_S]}(x) = \begin{cases} 1, & r_I \leq x \leq r_S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Números *Fuzzy* e seus α-níveis

Como todos os α-níveis de um número *fuzzy* são intervalos fechados, denotaremos eles por

$$[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

em que a_I^α e a_S^α correspondem respectivamente ao extremo inferior e superior do intervalo.

Em particular, $[A]^1 = \left[a_I^1, a_S^1\right] \neq \emptyset$. Logo, existe pelo menos um número $x \in \mathbb{R}$ tal que $A(x) = 1$.
Especificamente, $A(x) = 1$ para todo $x \in \left[a_I^1, a_S^1\right]$.

Os números *fuzzy* mais comuns são os **triangulares**, **trapezoidais** e em **forma de sino**.

Definição 2 (Número *fuzzy* triangular)

Um número *fuzzy* triangular é definido pela seguinte equação:

$$A(x;a,m,b) = \begin{cases} (x-a)/(m-a), & a < x \leq m, \\ (b-x)/(b-m), & m < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$A(x;a,m,b) = \max\left\{0, \min\left\{\frac{x-a}{m-a}, \frac{b-x}{b-m}\right\}\right\}.$$

Exemplo 3

Determine os α-níveis de um número *fuzzy* triangular

Exemplo 3

Determine os α-níveis de um número *fuzzy* triangular

Resposta: Os α-níveis são os intervalos

$$[a_I^\alpha, a_S^\alpha] = [(m-a)\alpha + a, (m-b)\alpha + b], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Exemplo 4

A expressão em torno de quatro horas pode ser modelada pelo número *fuzzy* triangular $A(x; 3.8, 4.0, 4.2)$.
Os α-níveis desse número *fuzzy* são os intervalos $\left[a_I^\alpha, a_S^\alpha\right]$ em que $a_I^\alpha = 0.2\alpha + 3.8$ e $a_S^\alpha = -0.2\alpha + 4.2$.

Conjuntos *Fuzzy* Gaussiano Limitado

Definição 5 (Número *fuzzy* trapezoidal)

Um número *fuzzy* trapezoidal é definido pela seguinte equação:

$$A(x; a, m, n, b) = \begin{cases} (x-a)/(m-a), & a < x < m, \\ 1, & m \leq x \leq n, \\ (b-x)/(b-n), & n < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$A(x; a, m, n, b) = \max\left\{0, \min\left\{\frac{x-a}{m-a}, 1, \frac{b-x}{b-n}\right\}\right\}.$$

Exemplo 6

Determine os α-níveis de um número *fuzzy* trapezoidal $A(x; a, m, n, b)$.

Exemplo 6

Determine os α-níveis de um número *fuzzy* trapezoidal $A(x; a, m, n, b)$.

Resposta: Os α-níveis são os intervalos

$$[a_I^\alpha, a_S^\alpha] = [(m-a)\alpha + a, (n-b)\alpha + b], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Exemplo 7

O conjunto *fuzzy* dos adolescentes pode ser representado pelo número *fuzzy* trapezoidal $A(x; 11, 14, 17, 20)$, cujos α-níveis são os intervalos

$$[3\alpha + 11, -3\alpha + 20], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Número *Fuzzy* Gaussiana Limitada

Definição 8 (Número *fuzzy* Gaussiana limitada)

Um número *fuzzy*, em forma de sino, com função de pertinência Gaussiana limitada é definido pela seguinte equação:

$$A(x; m, \sigma, \delta) = \begin{cases} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}, & x \in [m-\delta, m+\delta], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 9

Determine os α-níveis de número *fuzzy* Gaussiana limitada $A(x; m, \sigma, \delta)$.

Exemplo 9

Determine os α-níveis de número *fuzzy* Gaussiana limitada $A(x; m, \sigma, \delta)$.

Resposta: Os α-níveis são os intervalos fechados

$$[a_I^\alpha, a_S^\alpha] = \begin{cases} \left[m - \sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}, m + \sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}\right], & \alpha \geq e^{-(\delta/\sigma)^2}, \\ [m - \delta, m + \delta], & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Representação de um Número *Fuzzy*

Teorema 10 (Teorema de Ralescu-Negoita)

Considere uma família $\{I_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ *de intervalos fechados, limitados e não-vazios de* $\mathbb{R}$ *satisfazendo*

(a) $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} I_\alpha} = I_0$.

(b) *Se* $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, *então* $I_\beta \subseteq I_\alpha$,

(c) *Se* $\alpha_k \leq \alpha$ *é uma sequência que converge para* $\alpha \in (0,1]$, *então*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_k} = I_\alpha.$$

Nessas condições, existe um único número fuzzy $A \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ *tal que* $[A]^\alpha = I_\alpha$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

O teorema da representação de um número *fuzzy* de Ralescu-Negoita, em conjunto com a álgebra intervalar, pode ser usado para definir operações aritméticas com números *fuzzy*.

A aritmética intervalar foi desenvolvida, principalmente nos anos 60 por Ramon E. Moore, para trabalhar com limites de erros de arredondamento ou de medida.

Por exemplo, Arquimedes estimou que $223/71 \leq \pi \leq 22/7$. Portanto, pode-se considerar o intervalo $[223/71, 22/7]$ como uma aproximação para π.

Aritmética Intervalar

De um modo geral, uma operação $\star$, que pode ser a adição, subtração, multiplicação ou divisão, é definida da seguinte forma:

Definição 11 (Operação Intervalar)

Sejam $A = [a_I, a_S]$ e $B = [b_I, b_S]$ intervalos fechados e $\star$ uma operação de números reais. Define-se o intervalo fechado

$$A \star B = \{x \star y : a_I \leq x \leq a_S, b_I \leq y \leq b_S\},$$

exceto para a divisão quando $0 \in B$.

Teorema 12

Sejam $A = [a_I, a_S]$ e $B = [b_I, b_S]$ intervalos fechados, então:

(a) $A + B = [a_I + b_I, a_S + b_S]$.

(b) $A - B = [a_I - b_S, a_s - b_I]$.

(c) $A \cdot B = [\min P, \max P]$, *em que*

$$P = \{a_I b_I, a_I b_S, a_S b_I, a_S b_S\}.$$

(d) $A/B = [a_I, a_S] \cdot \left[\frac{1}{b_S}, \frac{1}{b_I}\right]$ *se* $0 \notin B$.

Note que um número real r pode ser visto como um intervalo degenerado $[r, r]$.

Se $r \in \mathbb{R}$ e $A = [a_I, a_S]$, então

$$r + A = [r + a_I, r + a_S],$$

e

$$r \cdot A = \begin{cases} [ra_I, ra_S], & r \geq 0 \\ [ra_S, ra_I], & r < 0. \end{cases}$$

Se ambos A e B são intervalos degenerados, obtemos as operações usuais com números reais.

Exemplo 13

Determine $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$ e A/B para os intervalos fechados $A = [-1, 2]$ e $B = [5, 6]$.

Exemplo 13

Determine $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$ e A/B para os intervalos fechados $A=[-1,2]$ e $B=[5,6]$.

Resposta:

$$A+B=[4,8],$$

$$A-B=[-7,-3],$$

$$A \cdot B=[-6,12],$$

e

$$A/B=[-1/5,2/5].$$

Operações com Números *Fuzzy*

Definição 14 (Operação *Fuzzy*)

Sejam A e B números *fuzzy* e $\star$ uma operação aritmética para intervalos fechados. O número *fuzzy* $A \star B$ é definido de modo que

$$[A \star B]^\alpha = [A]^\alpha \star [B]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Como $[A]^\alpha$ e $[B]^\alpha$ são intervalos fechados, $[A]^\alpha \star [B]^\alpha$ é também um intervalo fechado.

Sobretudo, $[A \star B]^\alpha$ satisfaz as condições de Ralescu-Negoita.

Logo, $A \star B$ é também um número *fuzzy*.

Exemplo 15 (Adição)

Determine $A + B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.

Exemplo 15 (Adição)

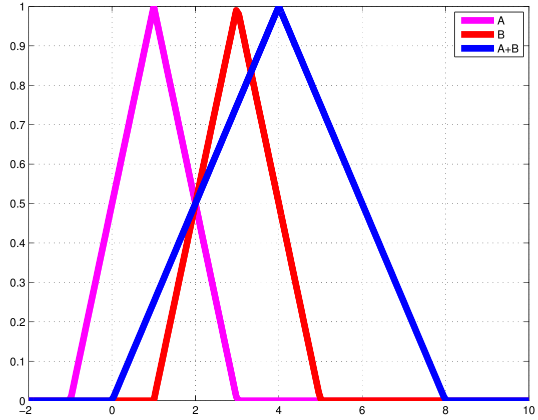
Determine $A + B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.

Resposta: Temos que $[A + B]^\alpha = [4\alpha, 8 - 4\alpha]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Logo,

$$A + B = \begin{cases} x/4, & 0 < x \leq 4, \\ (8 - x)/4, & 4 < x < 8, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 15 (Adição)

Determine $A + B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.



Exemplo 16 (Subtração)

Determine $A - B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.

Exemplo 16 (Subtração)

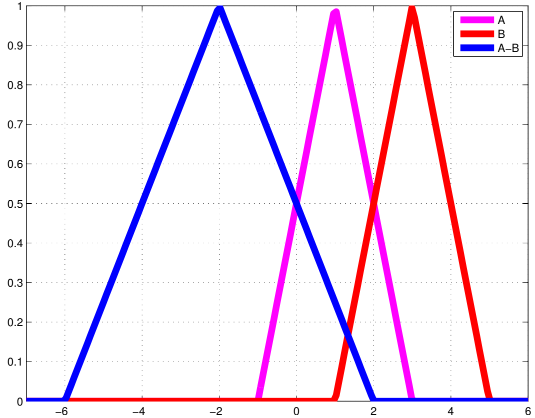
Determine $A - B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.

Resposta: Temos que $[A - B]^\alpha = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Logo,

$$A - B = \begin{cases} (x+6)/4, & -6 < x \leq -2, \\ (2-x)/4, & -2 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 16 (Subtração)

Determine $A - B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.



Exemplo 17 (Subtração)

Determine $A - A$ para o número *fuzzy* triangular $A(x; -1, 1, 3)$.

Exemplo 17 (Subtração)

Determine $A - A$ para o número *fuzzy* triangular $A(x; -1, 1, 3)$.

Resposta: Temos que $[A - A]^\alpha = [4\alpha - 4, -4\alpha + 4], \forall \alpha \in [0, 1]$. Logo,

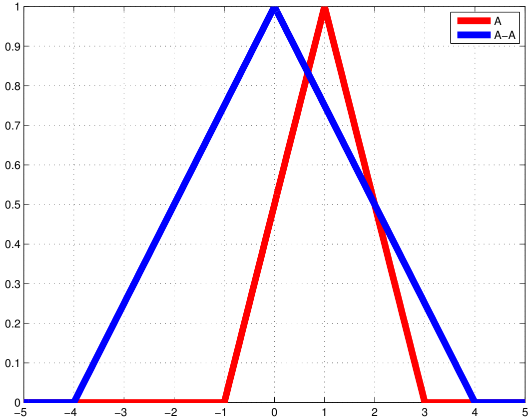
$$A - A = \begin{cases} 1 + x/4, & -4 < x \leq 0, \\ 1 - x/4, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $A - A \neq [0, 0]$.

Logo, $-A$ não é o inverso aditivo de A.

Exemplo 17 (Subtração)

Determine $A - A$ para o número *fuzzy* triangular $A(x; -1, 1, 3)$.



Exemplo 18 (Multiplicação)

Determine $A \cdot B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.

Exemplo 18 (Multiplicação)

Determine $A \cdot B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.

Resposta: Temos que

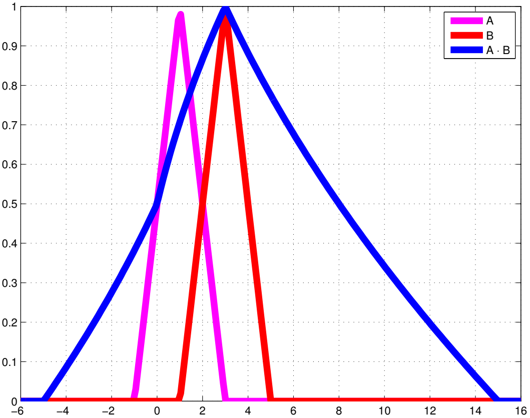
$$[A \cdot B]^\alpha = \begin{cases} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \alpha \in [0, 0.5], \\ [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \alpha \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Logo,

$$A \cdot B = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{2}, & -5 \leq x < 0, \\ \frac{\sqrt{1+x}}{2}, & 0 \leq x < 3, \\ \frac{4-\sqrt{1+x}}{2}, & 3 \leq x < 15, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 18 (Multiplicação)

Determine $A \cdot B$ para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.



Exemplo 19 (Divisão)

Determine A/B para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.

Exemplo 19 (Divisão)

Determine A/B para os números *fuzzy* triangulares $A(x;-1,1,3)$ e $B(x;1,3,5)$.

Resposta: Temos que

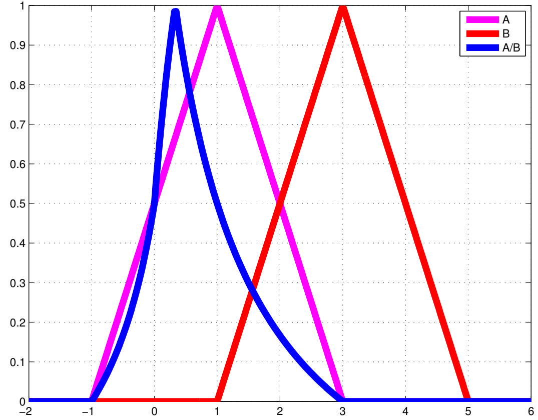
$$[A/B]^\alpha = \begin{cases} [(2\alpha-1)/(2\alpha+1),(3-2\alpha)/(2\alpha+1)], & \alpha \in [0,0.5], \\ [(2\alpha-1)/(5-2\alpha),(3-2\alpha)/(2\alpha+1)], & \alpha \in (0.5,1]. \end{cases}$$

Logo,

$$A/B = \begin{cases} \frac{x+1}{2-2x}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{5x+1}{2x+2}, & 0 \leq x < 1/3, \\ \frac{3-x}{2x+2}, & 1/3 \leq x < 3, \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Exemplo 19 (Divisão)

Determine A/B para os números *fuzzy* triangulares $A(x; -1, 1, 3)$ e $B(x; 1, 3, 5)$.



Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de número *fuzzy*. Um número *fuzzy* é um conjunto *fuzzy* de $\mathbb{R}$ cujos α-níveis são intervalos fechados.

Os principais exemplos de números *fuzzy* inclui os números fuzzy triangulares, trapezoidais e Gaussiana limitada.

Vimos também que podemos efetuar operações aritméticas com números *fuzzy* aplicando a operação correspondente nos α-níveis e combinando o resultado final usando o teorema da representação de Ralescu-Negoita.

Muito grato pela atenção!