Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 03 – Caracterização e Representação de Conjuntos *Fuzzy*.

Marcos Eduardo Valle

Na aula anterior apresentamos o conceito de conjunto *fuzzy*.

Basicamente, um conjunto *fuzzy* em um universo de discurso U é representado por uma função $A : U \rightarrow [0, 1]$, chamada função de pertinência.

O valor $A(u)$ representa o grau com que u pertence ao conjunto *fuzzy* A

Na aula de hoje, apresentaremos o conceito de α-nível de um conjunto *fuzzy*.

Dessa forma, mostremos que um conjunto *fuzzy* corresponde à família de conjuntos clássicos.

Antes, porém, apresentaremos alguns conceitos que caracterizam conjuntos *fuzzy*.

Definição 1 (Conjuntos *Fuzzy* Normal e Subnormal)

Dizemos que um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ é **normal** se

$$\sup_{u \in U} A(u) = 1.$$

Um conjunto *fuzzy* que não é normal é dito **subnormal**, i.e., $A \in \mathcal{F}(U)$ é subnormal se

$$\sup_{u \in U} A(u) < 1.$$

Lembre-se que $\sup_{u \in U} A(u) = 1$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $u \in U$ tal que $A(u) > 1 - \epsilon$.

Logo, um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ é normal se existe pelo menos um elemento $u \in U$ com pertinência em A tão próximo de 1 quanto se queira.

Definição 2 (Cerne de um Conjunto *Fuzzy*)

Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, o **cerne de** A (tradução do inglês *core*), denotado por $Cerne(A)$, é o subconjunto clássico de U dado por

$$Cerne(A) = \{u \in U : A(u) = 1\}.$$

Observe que o $Cerne(A)$ é o conjunto clássico formado por todos os elementos de A com pertinência 1.

Se A é um conjunto *fuzzy* subnormal, então $Cerne(A) = \emptyset$.

Observe que

$$Cerne : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{P}(U),$$

em que $\mathcal{P}(U)$ denota o conjunto das partes de U, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos de U.

Definição 3 (Suporte de um Conjunto *Fuzzy*)

Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, o **suporte de** A, denotado por $Supp(A)$, é o subconjunto (clássico) de U dado por

$$Supp(A) = \{u \in U : A(u) > 0\}.$$

Em termos gerais, $Supp(A)$ é o conjunto clássico de todos os elementos que possuem um certo grau de pertinência em A.

Note que

$$Cerne(A) \subseteq Supp(A)$$

para qualquer conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$.

Observe que $Supp : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{P}(U)$, em que $\mathcal{P}(U)$ denota o conjunto das partes de U

O suporte e o cerne de um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ podem ser vistos como o maior e o menor conjuntos clássicos que representam A.

Em muitas situações, podemos representar o conjunto *fuzzy* A usando um conjunto clássico que está entre o suporte e o cerne.

Desta forma, um elemento $u \in U$, está em uma certa classe se seu grau de pertinência é maior ou igual à um limiar $\alpha \in [0, 1]$ que define tal classe.

Definição 4 (α-Nível de um Conjunto *Fuzzy*)

Seja $A \in \mathcal{F}(U)$ um conjunto *fuzzy* de U e $\alpha \in (0, 1]$. O α-nível de A, denotado por $[A]^\alpha$, é o subconjunto clássico de U dado por

$$[A]^\alpha = \{u \in U : A(u) \geq \alpha\}, \quad \text{para } \alpha \in (0, 1].$$

Se U for um espaço métrico, define-se

$$[A]^0 = \overline{Supp}(A),$$

ou seja, $[A]^0$ é o fecho do suporte de A.

Note que $[A]^0$ é o menor conjunto clássico fechado de U que contém o suporte de A. Além disso, $\{u \in U : A(u) \geq 0\} = U$ não é necessariamente igual à $[A]^0$.

Observe que $Cerne(A) = [A]^1$ mas $Supp(A) \neq [A]^0$.

Exemplo 5

Seja $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o conjunto *fuzzy* dado por

$$A(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 < x \leq 2, \\ 3 - x, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine os α-níveis de A.

Exemplo 5

Seja $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o conjunto *fuzzy* dado por

$$A(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 < x \leq 2, \\ 3 - x, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine os α-níveis de A.

Resposta: Os α-níveis de A são os intervalos fechados

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha], \quad \forall \alpha (0, 1],$$

e

$$[A]^0 = \overline{(1, 3)} = [1, 3].$$

Exemplo 6

Determine os α-níveis do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([0,1])$ cuja função de pertinência é dada por

$$A(x) = 4(x - x^2).$$

Exemplo 6

Determine os α-níveis do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([0,1])$ cuja função de pertinência é dada por

$$A(x) = 4(x - x^2).$$

Resposta: Os α-níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

O seguinte exemplo mostra que os α-níveis não são sempre conjuntos fechados de U.

Exemplo 7

Determine os α-níveis $[A]^\alpha$ do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([0,1])$ cuja função de pertinência é dada por

$$A(x) = \begin{cases} 3 - x, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O seguinte exemplo mostra que os α-níveis não são sempre conjuntos fechados de U.

Exemplo 7

Determine os α-níveis $[A]^\alpha$ do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([0,1])$ cuja função de pertinência é dada por

$$A(x) = \begin{cases} 3 - x, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: Os α-níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = (2, 3-\alpha], \quad \forall \alpha (0,1),$$

e

$$[A]^1 = \emptyset \quad \text{e} \quad [A]^0 = \overline{(2,3)} = [2,3].$$

Teorema 8

Considere um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$*. Se* $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$*, então*

$$[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha \,.$$

O teorema 8 diz que o α-nível, visto como uma função de α para um conjunto *fuzzy* A fixo, é uma operação decrescente.

Demonstração.

Com efeito, suponha que $u \in [A]^\beta$. Pela definição de α-nível e o fato que $\alpha \leq \beta$, concluímos que $A(u) \geq \beta \geq \alpha$. Desse modo, novamente pela definição de α-nível, obtemos $u \in [A]^\alpha$. Portanto, $u \in [A]^\beta$ implica $u \in [A]^\alpha$, ou seja, $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$. □

Representação de Conjuntos *Fuzzy*

Os α-níveis possuem um papel importante na teoria dos conjuntos *fuzzy* porque permitem uma representação única de $A \in \mathcal{F}(U)$ em termos de conjuntos clássicos $[A]^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$.

Teorema 9 (Representação de Conjuntos *Fuzzy*)

Qualquer conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$ pode ser expresso em termos da função característica dos seus α-níveis como segue:

$$A(u) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \chi_{[A]^\alpha}(u), \quad \forall u \in U,$$

em que $\chi_{[A]^\alpha}$ denota a função característica do α-nível $[A]^\alpha$, isto é,

$$\chi_{[A]^\alpha}(u) = \begin{cases} 1, & A(u) \geq \alpha, \\ 0, & A(u) < \alpha. \end{cases}$$

Demonstração.

Dado $u \in U$, defina $a = A(u)$. Assim,

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(u) = \max\left\{ \sup_{\alpha \in (0,a]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(u), \sup_{\alpha \in (a,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(u) \right\}.$$

Por um lado, para cada $\alpha \in (a, 1]$, tem-se $A(u) = a < \alpha$. Logo, $u \notin [A]^\alpha$ e, portanto, $\alpha\chi_{[A]^\alpha}(u) = 0$.

Por outro lado, para cada $\alpha \in (0, a]$, tem-se $A(u) = a \geq \alpha$. Assim, $u \in [A]^\alpha$ e, consequentemente, $\alpha\chi_{[A]^\alpha}(u) = \alpha$.

Concluindo,

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(u) = \sup_{\alpha \in [0,a]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(u) = a = A(u).$$

□

O próximo teorema fornece uma condição suficiente para obter um conjunto *fuzzy* a partir de uma família de subconjuntos clássicos.

Teorema 10 (Representação de Negoita e Ralescu)

Considere uma família $A_\alpha, \alpha \in [0,1]$ *de subconjuntos clássicos de um espaço métrico* U *tais que*

(a) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in (0,1]} A_\alpha \subseteq A_0$.

(b) *Se* $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, *então* $A_\beta \subseteq A_\alpha$.

(c) *Se* α_k *é uma sequência que converge para* α *com* $\alpha_k \leq \alpha$, *então* $\displaystyle A_\alpha = \bigcap_{k \geq 0} A_{\alpha_k}$.

Nessas condições, existe um único conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$ *cujos* α*-níveis são exatamente os subconjuntos clássicos* A_α, *ou seja,* $[A]^\alpha = A_\alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

Considerações Finais

O Teo. 10 apresenta uma condição suficiente para que uma família de conjuntos clássicos represente um conjunto *fuzzy*.

Os α-níveis e o Teo. 10 são geralmente usados da seguinte forma:

1. Um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ é transformado numa família $\mathcal{A} = \{[A]^\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ de conjuntos clássicos.
2. Conceitos tradicionais, como derivação e integração, são aplicados na família $\mathcal{A}$.
3. Se as condições de Negoita e Ralescu são satisfeitas, obtemos novamente um conjunto *fuzzy* conforme enunciado pelo Teo. 10.

Os três passos acima fornecem uma ponte entre a teoria clássica e a teoria dos conjuntos *fuzzy*!

Muito grato pela atenção!