Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 02 – Conjuntos *Fuzzy* e suas Principais Operações.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Num dicionário, sinônimos da palavra **incerteza** incluem: subjetividade, imprecisão, aleatoriedade, dúvida, indecisão, ambiguidade, imprevisibilidade.

Com efeito, existem vários tipos de incerteza.

A teoria *fuzzy* trata incertezas relacionadas a linguagem natural.

Iniciaremos introduzindo o conceito de conjuntos *fuzzy* como uma generalização de um conjunto clássico.

Conjuntos Clássicos

Vimos na aula anterior que um conjunto clássico pode ser especificado pela equação

$$A = \{x \in U : \chi_A(x) \textit{ é verdadeira}\}, \tag{1}$$

em que χ_A é a *função característica* e U é o *universo de discurso*.

Identificando o valor verdadeiro por 1 (um) e o falso com 0 (zero), concluímos que a função característica de um conjunto A é da forma

$$\chi_A : U \to \{0, 1\},$$

em que

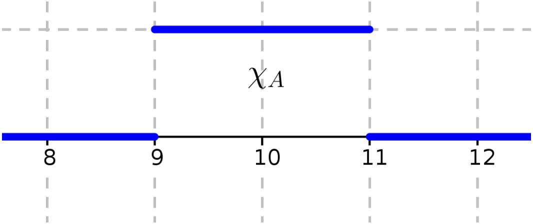
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Exemplo

A função característica $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ do conjunto clássico

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 9 \leq x \leq 11\},$$

é representada graficamente por



Limitações de um Conjunto Clássico

O conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 9 \leq x \leq 11\},$$

pode representar o conjunto dos “números próximos de 10”.

Nesse caso, 11 é próximo de 10 mas 12 não é próximo de 10.

De um modo geral, 11 está próximo de 10 mas $11 + \epsilon$ não é próximo de 10 para qualquer $\epsilon > 0$.

Na teoria dos conjuntos *fuzzy*, $11 + \epsilon$ pertence mais ao conjunto dos números próximos de 10 que 12 se ϵ for pequeno.

Com efeito, não diremos se um elemento pertence ou não a um conjunto *fuzzy*, mas diremos o grau com que o elemento pertence ao conjunto *fuzzy*.

Conjuntos *Fuzzy*

Definição 1 (Conjunto *Fuzzy*)

Considere um universo de discurso U (conjunto clássico). Um subconjunto *fuzzy*, ou simplesmente conjunto *fuzzy*, A de U é caracterizado por uma função

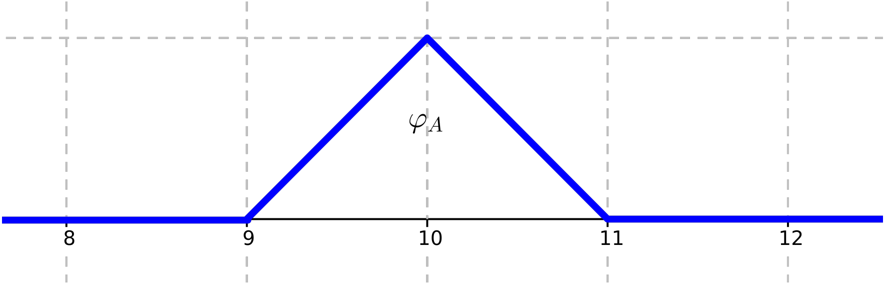
$$\varphi_A : U \to [0,1],$$

chamada **função de pertinência.**

O valor $\varphi_A(x)$ indica o grau com o que elemento $x \in U$ pertence ao conjunto *fuzzy* A.

Exemplo

O conjunto *fuzzy* dos “números próximos de 10” pode ser caracterizado, por exemplo, pela seguinte função de pertinência:



Observe que há uma transição gradual entre pertinência e não-pertinência!

Observações

As funções de pertinência do vazio e do universo de discurso são:

$$\varphi_{\emptyset}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_U(x) = 1, \quad \forall x \in U.$$

Dois conjuntos fuzzy A e B são iguais se possuem a mesma função de pertinência, isto é,

$$A = B \quad \iff \quad \varphi_A(x) = \varphi_B(x), \quad \forall x \in U.$$

Notação:

A família de todos os conjuntos *fuzzy* de U será denotada por $\mathcal{F}(U)$.

Observações

Na teoria dos conjuntos *fuzzy*, um conjunto clássico costuma ser denominado conjunto *crisp*.

Note que a função de pertinência de um conjunto *fuzzy* é obtida ampliando o contra-domínio $\{0, 1\}$ da função característica de conjunto clássico para o intervalo $[0, 1]$.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* generaliza a teoria clássica dos conjuntos. Porém, um conjunto *fuzzy* A pode ser identificado como o seguinte conjunto clássico de pares ordenados:

$$\{(x, \varphi_A(x)) : x \in U\}.$$

Notação para Conjunto *Fuzzy*

- Por um lado, um conjunto *fuzzy* A é completamente caracterizado por sua função de pertinência φ_A.
- Por outro lado, uma função $\varphi_A : U \to [0, 1]$ caracteriza um único conjunto *fuzzy* A.

Logo, é comum usar A para representar tanto a função de pertinência como o conjunto *fuzzy*, isto é, um conjunto *fuzzy* A é muitas vezes definido como uma função

$$A : U \to [0, 1],$$

em que o valor $A(x)$ representa o grau com que o elemento x pertence a A.

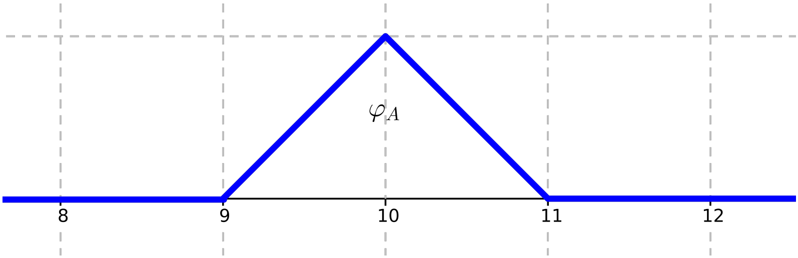
Alertamos, porém, que uma função $A : U \to [0, 1]$ é útil na teoria dos conjuntos *fuzzy* se podemos atribuir um significado para ela!

Destacamos também que uma função de pertinência caracteriza um conjunto *fuzzy*, e vice-versa.

Contudo, há uma certa arbitrariedade na escolha da função de pertinência que descreve um certo conceito.

Por exemplo, o conjunto dos números "próximos de 10" pode ser modelado pelo conjunto *fuzzy* cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \max\{0, \min\{x - 9, 11 - x\}\}.$$

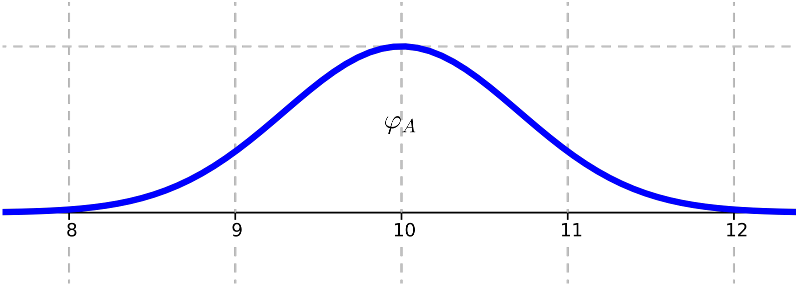


Destacamos também que uma função de pertinência caracteriza um conjunto *fuzzy*, e vice-versa.

Contudo, há uma certa arbitrariedade na escolha da função de pertinência que descreve um certo conceito.

Alternativamente, o conjunto dos números "próximos de 10" poderia ser modelado pelo conjunto *fuzzy* cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = e^{-(x-10)^2}.$$



Intersecção de Conjuntos Fuzzy

A intersecção de conjuntos clássicos $A, B \in \mathcal{P}(U)$ é dada por:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \textbf{ e } x \in B\}.$$

No caso *fuzzy*, a função de pertinência da intersecção $A \cap B$ é determinada ponto-a-ponto a partir de uma conjunção *fuzzy* das funções de pertinência de A e B, ou seja,

$$(A \cap B)(x) = \mathcal{C}\big(A(x), B(x)\big), \quad \forall x \in U,$$

em que $\mathcal{C}$ denota uma conjunção *fuzzy*.

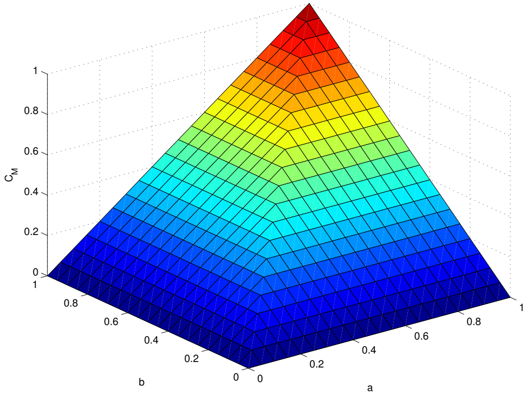
Definição 2 (Conjunção *Fuzzy*)

Uma função $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ crescente em ambos argumentos é uma conjunção *fuzzy* se

$$\mathcal{C}(0,0) = \mathcal{C}(0,1) = \mathcal{C}(1,0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{C}(1,1) = 1.$$

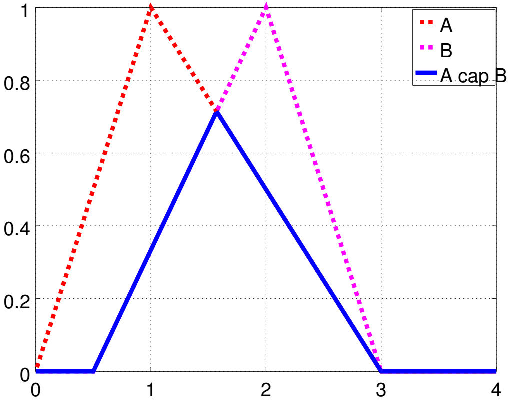
Conjunção *Fuzzy* – Mínimo

$$C_M(a, b) = \min\{a, b\} = a \wedge b.$$



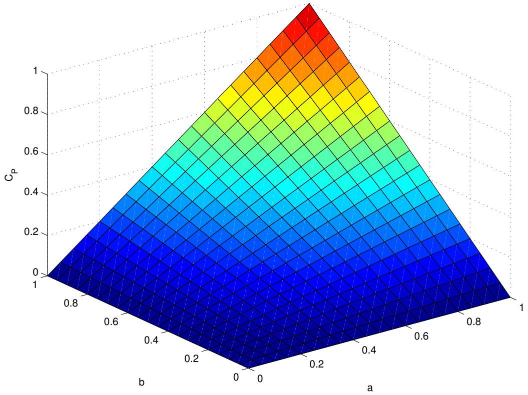
Conjunção *Fuzzy* – Mínimo

$$C_M(a, b) = \min\{a, b\} = a \wedge b.$$



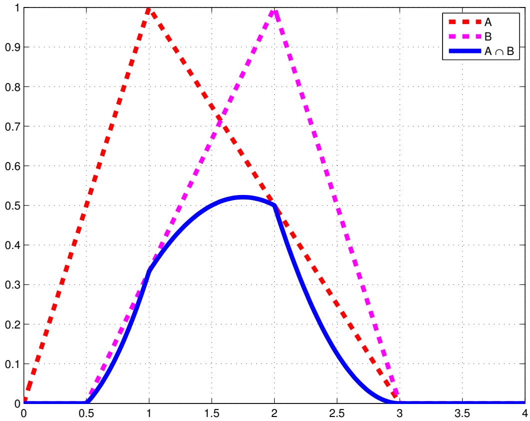
Conjunção *Fuzzy* – Produto

$$C_P(a, b) = a \cdot b.$$



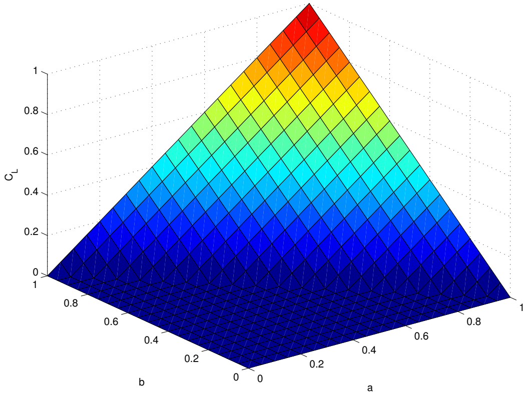
Conjunção *Fuzzy* – Produto

$$C_P(a, b) = a \cdot b.$$



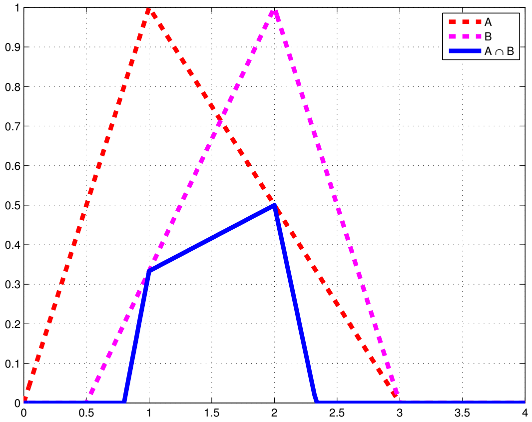
Conjunção *Fuzzy* de Lukasiewicz

$$C_L(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}.$$



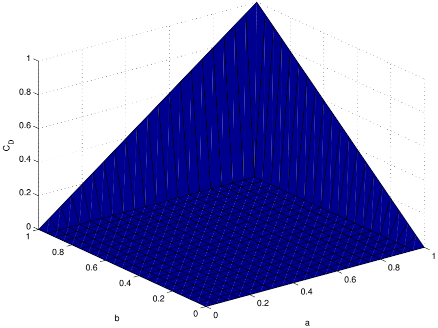
Conjunção *Fuzzy* de Lukasiewicz

$$C_L(a,b) = \max\{0, a+b-1\}.$$



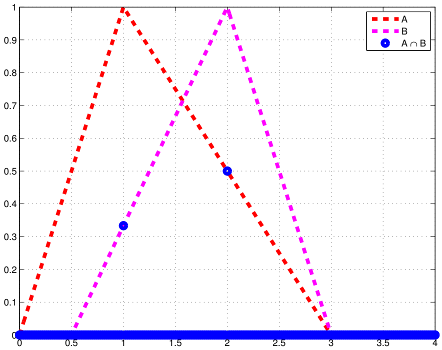
Conjunção *Fuzzy* Drástica

$$C_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



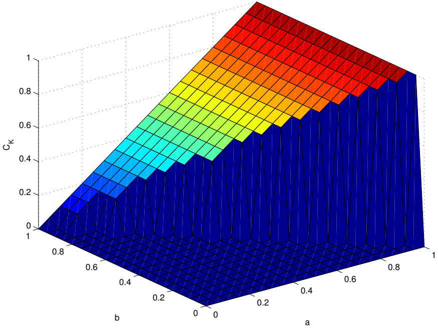
Conjunção *Fuzzy* Drástica

$$C_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



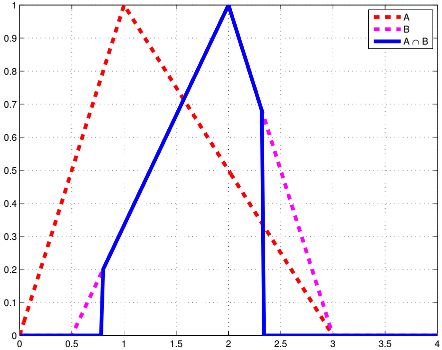
Conjunção *Fuzzy* de Kleene-Dienes

$$C_K(a,b) = \begin{cases} 0, & b \leq 1-a, \\ b, & b > 1-a. \end{cases}$$



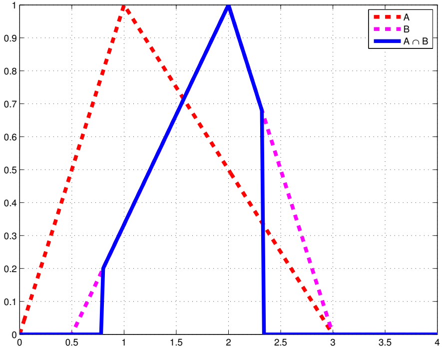
Conjunção *Fuzzy* de Kleene-Dienes

$$C_K(a,b) = \begin{cases} 0, & b \leq 1-a, \\ b, & b > 1-a. \end{cases}$$



Conjunção *Fuzzy* d Kleene-Dienes

Cuidado: A conjunção de Kleene-Dienes não é comutativa!

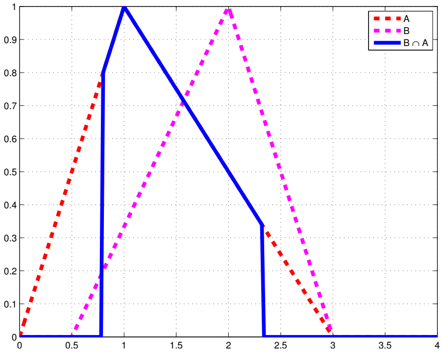


Ela também não é associativa, ou seja, podemos ter

$$(A \cap B) \cap C \neq A \cap (B \cap C).$$

Conjunção *Fuzzy* d Kleene-Dienes

Cuidado: A conjunção de Kleene-Dienes não é comutativa!



Ela também não é associativa, ou seja, podemos ter

$$(A \cap B) \cap C \neq A \cap (B \cap C).$$

Norma Triangular

A intersecção de conjuntos clássicos é comutativa, associativa e satisfaz $A \cap U = A$.

Impondo essas propriedades na intersecção de conjuntos *fuzzy*, concluímos que a conjunção deve ser a definição:

Definição 3 (Norma Triangular ou t-norma)

Uma norma triangular ou t-norma é uma operação $\triangle\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, com $\triangle(a,b) = a \triangle b$, tal que

1. $a \triangle b = b \triangle a$, (comutativa)
2. $(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$, (associativa)
3. $b \leq c \implies a \triangle b \leq a \triangle c$, (monótona crescente)
4. $a \triangle 1 = a$, (identidade)

para $a, b, c \in [0,1]$.

As conjunções do mínimo, produto, Lukasiewicz e drástica são todas normas t-normas denotadas por $\triangle_M$, $\triangle_P$, $\triangle_L$ e $\triangle_D$, respectivamente.

A conjunção de Kleene-Dienes não é uma t-norma.

As t-normas geralmente não podem ser ordenadas. Porém, o mínimo é a maior t-norma enquanto que a t-norma drástica é a menor t-norma.

Pode-se demonstrar a seguinte relação em que $\triangle$ denota uma t-norma arbitrária:

$$a \triangle_D b \leq a \triangle b \leq a \triangle_M b, \quad \forall a, b \in [0, 1].$$

União de Conjuntos Fuzzy

Analogamente, a união de conjuntos clássicos $A, B \in \mathcal{P}(U)$ é dada por:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

No caso *fuzzy*, dados conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(U)$, a função de pertinência da união $A \cup B$ é definida como segue:

$$(A \cup B)(x) = \mathcal{D}\big(A(x), B(x)\big), \quad \forall x \in U,$$

em que $\mathcal{D}$ denota uma disjunção *fuzzy*.

Definição 4 (Disjunção *Fuzzy*)

Uma função $\mathcal{D} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ crescente em ambos argumentos é uma conjunção *fuzzy* se

$$\mathcal{D}(0,0) = \mathcal{D}(0,1) = \mathcal{D}(1,0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(1,1) = 1.$$

Conorma Triangular

Tal como uma conjunção *fuzzy*, uma disjunção *fuzzy* não precisa ser comutativa, associativa nem possuir uma identidade!

Contudo, a união de conjuntos clássicos é comutativa, associativa e satisfaz $A \cup \emptyset = A$.

Impondo essas propriedades, uma disjunção *fuzzy* deve satisfazer:

Definição 5 (Conorma Triangular ou t-conorma)

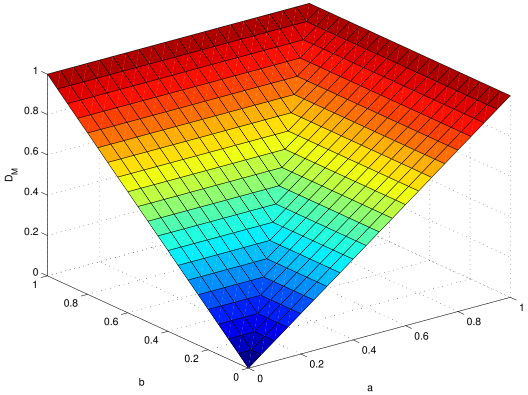
Uma conorma triangular ou t-conorma é uma operação $\triangledown : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, com $\triangledown(a,b) = a \triangledown b$, tal que

1. $a \triangledown b = b \triangledown a$, (comutativa)
2. $(a \triangledown b) \triangledown c = a \triangledown (b \triangledown c)$, (associativa)
3. $b \leq c \implies a \triangledown b \leq a \triangledown c$, (monótona crescente)
4. $a \triangledown 0 = a$, (identidade)

para $a, b, c \in [0,1]$.

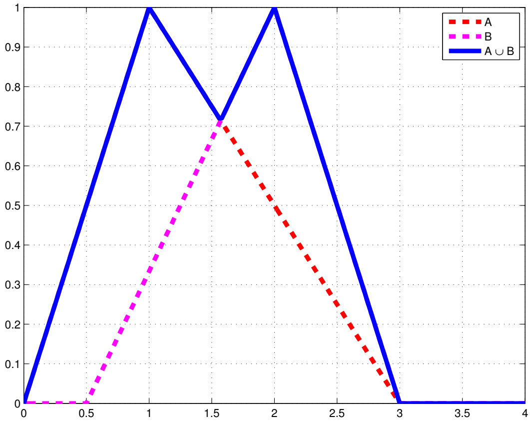
T-conorma – Máximo

$$\triangledown_M(a,b) = \max\{a,b\} = a \vee b.$$



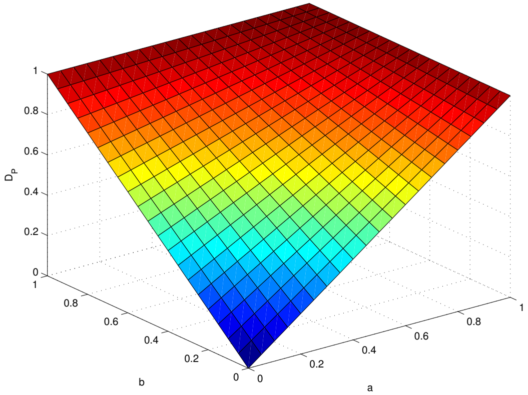
T-conorma – Máximo

$$\nabla_M(a,b) = \max\{a,b\} = a \vee b.$$



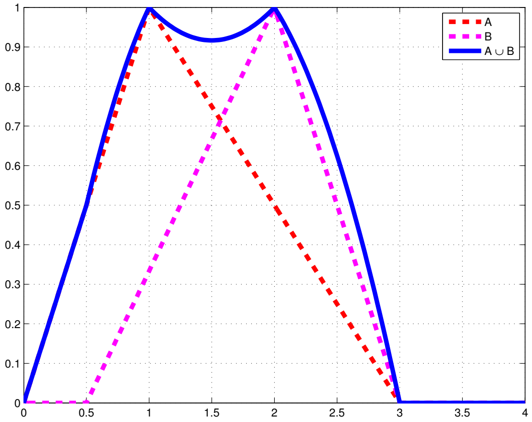
T-conorma – Soma probabilística

$$\triangledown_P(a, b) = a + b - a \cdot b.$$



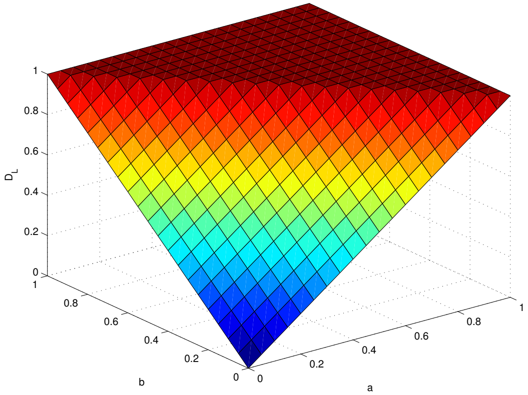
T-conorma – Soma probabilística

$$\triangledown_P(a,b) = a + b - a \cdot b.$$



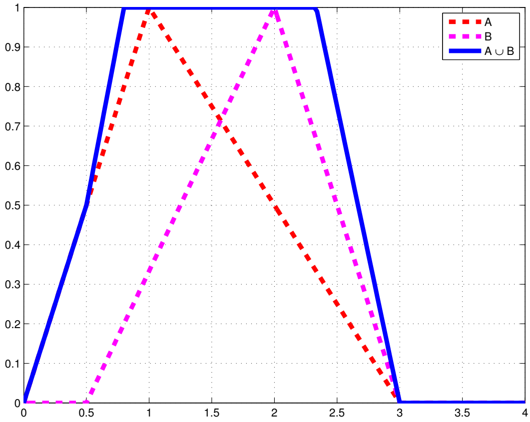
T-conorma de Lukasiewicz

$$\nabla_L(a, b) = \min\{1, a + b\}.$$



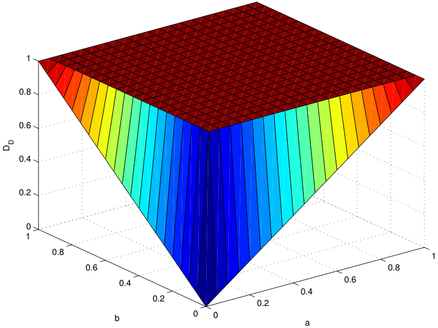
T-conorma de Lukasiewicz

$$\triangledown_L(a,b) = \min\{1, a+b\}.$$



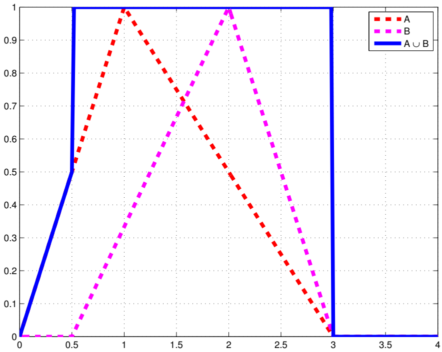
T-conorma Drástica

$$\triangledown_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 0, \\ b, & a = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



T-conorma Drástica

$$\nabla_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 0, \\ b, & a = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



As t-conormas geralmente não podem ser ordenadas. Porém, o máximo é a menor t-conorma enquanto que a t-conorma drástica é a maior t-norma.

Pode-se demonstrar a seguinte relação em que $\triangledown$ denota uma t-conorma arbitrária:

$$a \triangledown_M b \leq a \triangledown b \leq a \triangledown_D b, \quad \forall a, b \in [0, 1].$$

Complemento de um Conjunto *Fuzzy*

Na teoria clássica, o complemento de um conjunto A é formado por todos os elementos que **não** pertencem a A, ou seja,

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

No caso *fuzzy*, a função de pertinência do complemento A^c é

$$A^c(x) = \eta\big(A(x)\big), \quad \forall x \in U,$$

em que η denota uma negação *fuzzy*.

Definição 6 (Negação Fuzzy)

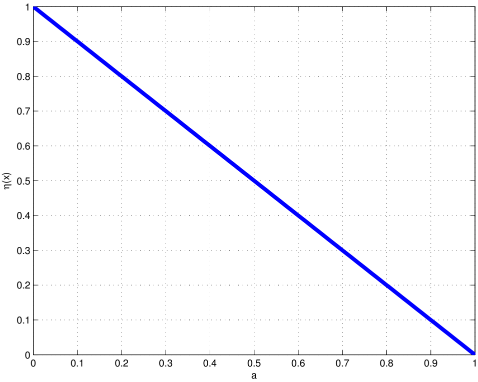
Uma aplicação decrescente $\eta : [0,1] \to [0,1]$ é uma negação *fuzzy* se satisfaz $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$.

Uma negação *fuzzy* é dita **forte** se é uma involução, ou seja,

$$\eta\big(\eta(a)\big) = a, \quad \forall a \in [0,1].$$

Negação *Fuzzy* Usual (Standard)

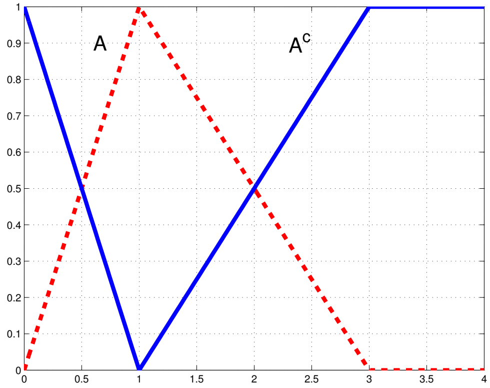
$$\eta_S(a) = 1 - a.$$



Esta é uma negação forte!

Negação *Fuzzy* Usual (Standard)

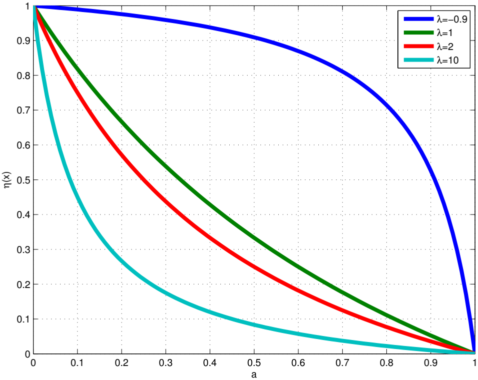
$$\eta_S(a) = 1 - a.$$



Esta é uma negação forte!

Negação *Fuzzy* de Sugeno

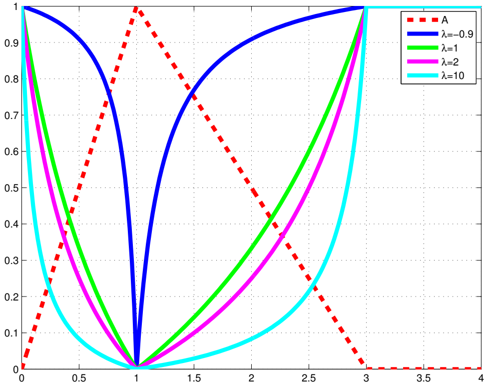
$$\eta_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}, \quad \lambda \in (-1, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $\lambda = 0$.

Negação *Fuzzy* de Sugeno

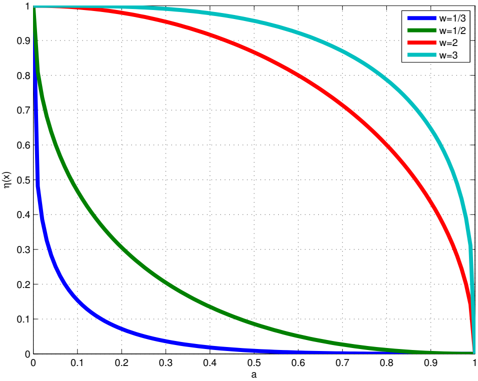
$$\eta_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}, \quad \lambda \in (-1, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $\lambda = 0$.

Negação *Fuzzy* de Yager

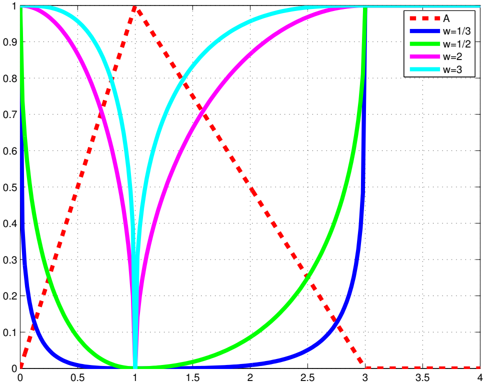
$$\eta_w(a) = \sqrt[w]{1 - a^w}, \quad w \in (0, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $w = 1$.

Negação *Fuzzy* de Yager

$$\eta_w(a) = \sqrt[w]{1 - a^w}, \quad w \in (0, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $w = 1$.

Leis de DeMorgan

Na teoria clássica dos conjuntos, as operações de união, intersecção e complemento satisfazem

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{e} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Tripla de DeMorgan: $(\triangle, \triangledown, \eta)$.

As leis de DeMorgan valem na teoria *fuzzy* se a união, intersecção e complemento são determinados usando uma t-norma, uma t-conorma e uma negação *fuzzy* forte tais que

$$\eta\big(a \triangle b\big) = \eta(a) \triangledown \eta(b) \quad \text{e} \quad \eta\big(a \triangledown b\big) = \eta(a) \triangle \eta(b),$$

para todo $a, b \in [0, 1]$.

São exemplos de tripla de DeMorgan:

- $(\triangle_M, \triangledown_M, \eta_S)$ – Mínimo, máximo e negação usual.
- $(\triangle_P, \triangledown_P, \eta_S)$ – Produto, soma probabilística e negação usual.
- $(\triangle_L, \triangledown_L, \eta_S)$ – T-norma e t-conorma de Lukasiewicz e negação usual.

Lei do Terceiro Excluído

Na lógica clássica, uma proposição é verdadeira ou sua negação é verdadeira.

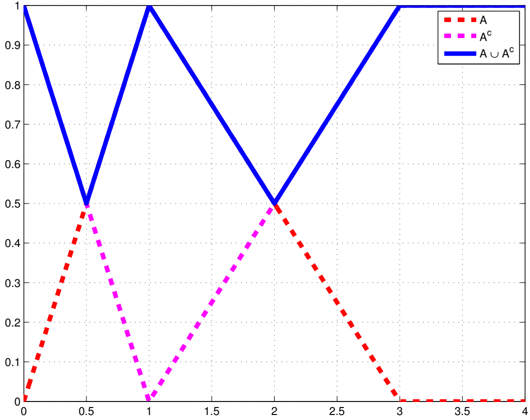
Em termos de conjuntos, tem-se que:

$$A \cup A^c = U.$$

Na teoria dos conjuntos *fuzzy*, não a lei do terceiro excluído pode não valer!

Exemplo da Lei do Terceiro Excluído

Considere a negação usual e a t-conorma do máximo.



Neste caso, $A \cup A^c \neq U$.

Lei da Não-Contradição

Na lógica clássica, duas afirmações contraditórias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.

Em termos da linguagem de conjuntos, tem-se que:

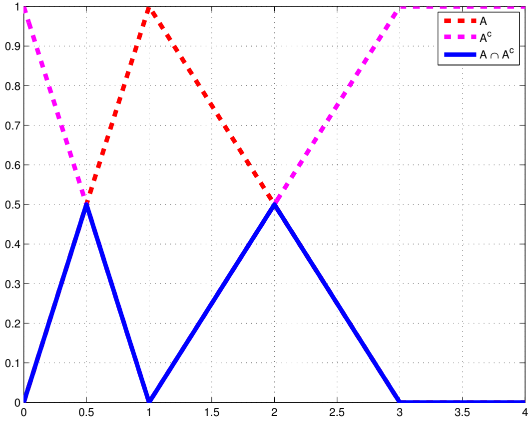
$$A \cap A^c = \emptyset.$$

Na teoria dos conjuntos *fuzzy*, não temos a lei da não-contradição!

A violação da lei da não-contradição mostra que a teoria *fuzzy* permite a coexistência de uma classe e seu complemento!

Exemplo da Lei da Não-Contradição

Considere a negação usual e a t-norma do mínimo.



Neste caso, $A \cap A^c \neq \emptyset$.

Considerações Finais

Na aula de hoje mostramos que um conjunto *fuzzy* pode ser caracterizado por sua função de pertinência

$$\varphi_A : U \to [0,1] \quad \text{ou simplesmente} \quad A : U \to [0,1].$$

As operações de união, intersecção e complemento são definidas ponto-a-ponto usando respectivamente conjunção *fuzzy*, disjunção *fuzzy* e negação *fuzzy*.

Geralmente, definimos a união e a intersecção usando normas e co-normas triangulares, que são operadores crescentes, associativos, comutativos e que possuem 1 (um) ou 0 (zero) como identidade, respectivamente.

Muito grato pela atenção!