Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 01 – Motivação à Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e Revisão da Teoria Clássica.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

A palavra *fuzzy*, de origem inglesa, significa **incerto, vago, impreciso, subjetivo, nebuloso, difuso, etc**.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* (e também a lógica *fuzzy*) foi introduzida por L. Zadeh em 1965 com o objetivo de modelar conceitos vagos ou imprecisos.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* (tal como a lógica *fuzzy*) não é uma teoria vaga mas, sim, uma teoria para modelar conceitos vagos!

Hoje, existem aplicações da teoria dos conjuntos *fuzzy* nas mais diversas áreas!

Veja reportagem sobre Zadeh e a teoria *fuzzy* em: `www.youtube.com/watch?v=2ScTwFCcXGo`.

Apresentaremos algumas frases que talvez tenham motivado a teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Problema da Dicotomia (Borel, 1950)

One seed does not constitute a pile nor two nor three... from the other side everybody will agree that 100 million seeds constitute a pile. What therefore is the appropriate limit? Can we say that 325 647 seeds don't constitute a pile but 325 648 do?

Além do problema da dicotomia de Borel, considere o seguinte:

Einstein, 1928:

As far as the propositions of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality.

A observação e Einstein pode ter motivado Zadeh a formular o seguinte princípio:

Princípio da Incomptaibilidade (Zadeh, 1973)

State informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics.

Outra interpretação pode ser dada por:

Klir, 1995:

Although usually (but not always) undesirable when considered alone, uncertainty becomes very valuable when considered in connection to the other characteristics of systems models: in general, allowing more uncertainty tends to reduce complexity and increase credibility of the resulting model.

Abaixo apresentamos um exemplo ilustrando o princípio da incompatibilidade de Zadeh:

Exemplo 1

Suponha que você está ensinando um colega a dirigir e o carro se aproxima de um sinal fechado. Você diria:

- "Comece a desacelerar o veículo daqui a 34 segundos e 22 milésimos."

  ou
- "Breque daqui a pouco."

A primeira afirmação é mais precisa, porém, a segunda pode ser tão útil quanto a primeira.

Em essência, conceitos vagos podem ser usados para resolver problemas complexos!

De fato, no cotidiano usamos muitos termos vagos. Por exemplo: dia quente, mulher bonita, carro grande, nos encontramos por volta das 10h00, etc.

Esses são modelados por *fuzzy* pois não possuem uma fronteira bem definida.

Com efeito, tal como no problema da dicotomia de Borel, 10h01 é próximo das 10h00? E 10h02, é também próximo das 10h00? Quando não será próximo das 10h00?

Para entender melhor o problema da dicotomia de Borel e melhor compreender a teoria dos conjuntos *fuzzy*, vamos fazer uma breve revisão da teoria clássica dos conjuntos.

Conjuntos Clássicos

A teoria dos conjuntos, desenvolvida inicialmente e principalmente por George Cantor no final do século XIX, constitui uma forma elegante e sistemática de representar conceitos matemáticos.

Um conjunto é uma coleção de objetos que, por alguma razão, nos convém situar coletivamente como uma única entidade. Tais objetos são geralmente referidos como elementos do conjunto.

Os elementos podem ser qualquer coisa como, por exemplo, livros de uma biblioteca, números, pessoas, países, etc.

O importante é que um elemento ou pertence ou não pertence a um certo conjunto. Essa relação entre um conjunto e um elemento é chamada relação de pertinência.

Caracterização de Conjuntos

Um conjunto pode ser definido de uma das seguintes formas:

- Listando seus elementos explicitamente.
  Por exemplo, $A = \{0, 1, e, \pi\}$.
  Esta forma só vale para conjuntos finitos (e, pequenos...)
- Especificando uma propriedade dos seus elementos.
  Por exemplo, $A = \{x \in \mathbb{R} : 9 \leq x \leq 11\}$.

De forma mais geral, temos

$$A = \{x \in U : \chi_A(x) \text{ é verdadeira}\}, \tag{1}$$

em que χ_A, chamada *função característica*, estabelece uma propriedade que deve ser satisfeita pelos elementos de A e U é o chamado *universo de discurso*.

A família de todos os conjuntos de um universo de discurso U, chamada *conjunto das partes* de U, é denotada por $\mathcal{P}(U)$. Note que

$$A \in \mathcal{P}(U) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq U.$$

O conjunto que não possui elementos é chamado *conjunto vazio* e denotado por $\emptyset$.

Operações com Conjuntos

As operações elementares com conjuntos são definidas como segue para $A, B \in \mathcal{P}(U)$.

- **Intersecção:**
$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \textbf{ e } x \in B\}.$$
- **União:**
$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$
- **Complemento:**
$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Note que as operações elementares com conjuntos são definidas usando os conectivos básicos da lógica:
conjunção ("**e**"), disjunção ("**ou**") e negação ("**não**").

Conceitos de Lógica

A lógica é constituída por proposições, que são sentenças declarativas que ou são falsas ou são verdadeiras.

A conjunção de duas proposições p e q, denotada por $p \wedge q$ ou $C(p, q)$, é verdadeira somente se ambas p e q forem verdadeiras.

A disjunção de p e q, denotada por $p \vee q$ ou $D(p, q)$, é verdadeira se uma das duas proposições p ou q forem verdadeiras.

A negação de p, denotada por $\neg p$ ou $\eta(p)$, é verdadeira se p for falsa, e vice-versa.

Tabela Verdade dos Conectivos Básicos

Identificando o valor de uma proposição por

- 0 (zero) se for falso,
- 1 (um) se for verdadeiro,

obtemos as seguintes *tabela-verdade* para os conectivos básicos:

Conjunção

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Disjunção

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Negação

p	$\neg p$
0	1
1	0

Implicação

Outro conectivo importante na lógica é a *implicação* ou *condicional*.

A implicação, denotada por $p \rightarrow q$ ou $I(p,q)$, é falsa somente quando p é verdadeira e q é falsa. A tabela-verdade da implicação é

$p \rightarrow q$	$q = 0$	$q = 1$
$p = 0$	1	1
$p = 1$	0	1

Observação:

Em demonstrações, frequentemente escrevemos $p \Rightarrow q$. Ao contrário da condicional $p \rightarrow q$, que pode ser tanto falsa como verdadeira, $p \Rightarrow q$ corresponde dizer que "$p \rightarrow q$ é verdadeira". Assim, se p é verdadeira e $p \Rightarrow q$, então q também é verdadeira.

Inclusão e Igualdade de Conjuntos

Se todo elemento de um conjunto $A \in \mathcal{P}(U)$ é também um elemento de $B \in \mathcal{P}(U)$, então diremos que A está *contido*, está *incluído* ou é um *subconjunto de* B e escrevemos $A \subseteq B$. Alternativamente, podemos dizer que B *contém* A se $A \subseteq B$.

Usando o conceito de implicação da lógica, temos que

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in U, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Dizemos que dois conjuntos $A \in \mathcal{P}(U)$ e $B \in \mathcal{P}(U)$ são iguai, e escrevemos $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Dualmente, escrevemos $A \neq B$ se um conjunto possui pelo menos um elemento que não pertence ao outro.

Considerações Finais

Na aula de hoje, motivamos o desenvolvimento da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Depois, voltamos nossa atenção à uma breve revisão dos principais conceitos da teoria clássica dos conjuntos.

Em particular, destacamos que um conjunto pode ser definido especificando a propriedade que seus elementos satisfaze, isto é,

$$A = \{x \in U : \chi_A(x) \text{ é verdadeira}\}, \tag{2}$$

em que χ_A é chamada função característica de A.

Comentamos também sobre as principais operações com conjuntos e destacamos a relação dessas operações com conectivos da lógica clássica.

Paradox de Russel

Aparentemente podemos definir qualquer conjunto especificando uma propriedade que seus elementos satisfazem.

Se fosse assim, poderíamos definir o conjunto

$$A = \{x : x \notin A\}.$$

Em palavras, A é o conjunto formado por todos os elementos que não são elementos de A.

Este paradoxo foi apresentado por Bertrand Russel em 1902.

A versão popular deste paradoxo é dada por:

> *"Numa certa cidade existe um único barbeiro que só faz a barba dos homens que não barbeiam a si próprios. Nesta cidade, quem faz a barba do barbeiro?"*

O paradoxo de Russel mostra que a teoria dos conjuntos requer alguns cuidados especiais.

Existe na literatura uma formalização da teoria dos conjuntos usando axiomas. Contudo, nos contentaremos com a chamada “teoria ingênua”.

Embora chamada “teoria ingênua”, ela é suficiente para o desenvolvimento de boa parte da matemática pois, em geral, tomam-se os devidos cuidados ao definir um conjunto.

Na próxima aula continuaremos revendo alguns conceitos clássicos que serão usados posteriormente no desenvolvimento da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Muito grato pela atenção!