

# MS211 - Cálculo Numérico

Complemento da Aula 23 – Cálculo de um Spline Cúbica Natural.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle  
Matemática Aplicada  
IMECC - Unicamp



# Splines Cúbicas

---

Dados nós  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , uma spline cúbica é uma função polinomial por partes  $\mathcal{S}_3$  com as seguintes propriedades:

- $\mathcal{S}_3$  é um polinômio de grau menor ou igual à 3 em cada um dos subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$ .
- $\mathcal{S}_3$  tem derivadas de primeira e segunda ordem contínuas em  $[x_0, x_n]$ .

Sendo um caso particular de polinômios cúbicos por partes, uma spline cúbica é da forma

$$S_3(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ s_k(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \vdots & \\ s_n(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

em que

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

é um polinômio de grau pelo menos 3.

---

Note que uma spline cúbica é determinada por  $4n$  parâmetros  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$ .

Como  $S_3$ ,  $S'_3$  e  $S''_3$  são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k) \quad \text{e} \quad s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k),$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

---

Num problema de interpolação, devemos também ter  $S_3(x_k) = y_k$ , ou seja,

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

---

Com isso, temos

$$3(n-1) + (n+1) = 4n - 2,$$

equações para determinar  $4n$  incógnitas.

---

Logo, temos duas condições em aberto que podem ser impostas, por exemplo, de acordo com informações físicas sobre o problema.

# Spline Cúbica Natural

---

A **spline cúbica natural** é obtida impondo as condições

$$S_3''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad S_3''(x_n) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$s_1''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad s_n''(x_n) = 0.$$

---

Pode-se mostrar que a spline cúbica natural é aquela de menor curvatura.

---

Vamos mostrar que uma spline cúbica natural é determinada resolvendo um sistema linear tridiagonal

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Primeiro note que

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

$$s'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k,$$

$$s''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k,$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

---

Da condição de interpolação, devemos ter

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

---

Analogamente, vamos escrever

$$y'_0 = s'_1(x_0) \quad \text{e} \quad y'_k = s'_k(x_k), \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

e

$$y''_0 = s''_1(x_0) \quad \text{e} \quad y''_k = s''_k(x_k), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Da expressão para  $s_k''$  concluímos que

$$y_k'' = s_k''(x_k) = 2b_k \implies b_k = \frac{y_k''}{2}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

---

Além disso, da continuidade de  $S_3''$ , obtemos

$$y_{k-1}'' = s_{k-1}''(x_{k-1}) = s_k(x_{k-1}) = 6a_k(x_{k-1} - x_k) + 2b_k.$$

---

Denotando

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

concluímos que

$$y_{k-1}'' = -6a_k h_k + 2b_k \implies a_k = \frac{y_k'' - y_{k-1}''}{6h_k}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Da condição de interpolação  $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$ , concluímos que

$$y_k = s_k(x_k) = d_k \implies d_k = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

---

Além disso, da continuidade de  $\mathcal{S}_3$ , temos

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= s_{k-1}(x_{k-1}) = s_k(x_{k-1}) \\ &= a_k(x_{k-1} - x_k)^3 + b_k(x_{k-1} - x_k)^2 + c_k(x_{k-1} - x_k) + d_k \\ &= -a_k h_k^3 + b_k h_k^2 - c_k h_k + d_k, \end{aligned}$$

em que  $h_k = x_k - x_{k-1}$ . Isolando  $c_k$ , obtemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{h_k} \left[ -a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + d_k - y_{k-1} \right] \\ &= -a_k h_k^2 + b_k h_k + \frac{d_k - y_{k-1}}{h_k} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões para  $a_k$ ,  $b_k$  e  $d_k$ , concluímos que

$$c_k = \frac{h_k}{6} (2y_k'' + y_{k-1}'') + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$



Concluindo, os coeficientes  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  e  $d_k$  em

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

da spline cúbica natural satisfazem

$$a_k = \frac{y_k'' - y_{k-1}''}{6h_k},$$

$$b_k = \frac{y_k''}{2},$$

$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k y_k'' + y_{k-1}'' h_k}{6},$$

$$d_k = y_k,$$

para todo  $k = 1, \dots, n$ .

---

Agora,  $y_0, y_1, \dots, y_n$  são dados num problema de interpolação.

---

Resta determinar  $y_0'', y_1'', \dots, y_n''$ .

Na spline natural,  $y_0'' = 0$  e  $y_n'' = 0$ . Os valores  $y_1'', y_2'', \dots, y_{n-1}''$  são determinados da continuidade de  $S_3'$ .

---

Com efeito, da condição

$$s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1,$$

deduzimos

$$\begin{aligned} c_k &= 3a_{k+1}(x_k - x_{k+1})^2 + 2b_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + c_{k+1} \\ &= 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}, \quad \forall k = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

em que  $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ .

---

Substituindo as expressões para  $c_k$ ,  $a_{k+1}$ ,  $b_{k+1}$ ,  $c_{k+1}$  e agrupando os termos, encontramos

$$h_k y_{k-1}'' + 2(h_k + h_{k+1})y_k'' + h_{k+1}y_{k+1}'' = 6 \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right),$$

para  $k = 1, \dots, n-1$ .



## Exemplo 1

Determine a spline cúbica natural  $\mathcal{S}_3$  que interpola a tabela

$x$	0	1/4	1/2	3/4	1
$y$	1	2	1	0	1

e calcule  $\mathcal{S}_3(0.35)$ .

## Exemplo 1

Determine a spline cúbica natural  $S_3$  que interpola a tabela

$x$	0	1/4	1/2	3/4	1
$y$	1	2	1	0	1

e calcule  $S_3(0.35)$ .

**Resposta:** Primeiro, resolvemos o sistema linear

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ 48 \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece

$$y_0'' = 0, \quad y_1'' = -48, \quad y_2'' = 0, \quad y_3'' = 48 \quad \text{e} \quad y_4'' = 0.$$

Com esses valores, concluímos que a spline cúbica natural que interpola a tabela é

$$\mathcal{S}_3(x) = \begin{cases} -32(x - \frac{1}{4})^3 - 24(x - \frac{1}{4})^2 + 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 32(x - \frac{1}{2})^3 - 6(x - \frac{1}{2}) + 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 32(x - \frac{3}{4})^3 + 24(x - \frac{3}{4})^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ -32(x - 1)^3 + 6(x - 1) + 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Finalmente, como  $0.35 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ , temos que

$$\mathcal{S}_3(0.35) = 32(-0.15)^3 - 6(-0.15) + 1 = 1.792.$$