

MS211 - Cálculo Numérico

Aula 23 – Fenômeno de Runge, Nós de Chebyshev,
Interpolação por Partes e Splines Cúbicas.



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp



No problema de interpolação determinamos um polinômio p_n , de grau menor ou igual a n , tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ são dados.

No problema de interpolação determinamos um polinômio p_n , de grau menor ou igual a n , tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n + 1$ contínuas, então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| \quad \text{com} \quad M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

No problema de interpolação determinamos um polinômio p_n , de grau menor ou igual a n , tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n + 1$ contínuas, então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| \quad \text{com} \quad M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Em particular, se x_0, x_1, \dots, x_n forem igualmente espaçados, então

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)} \quad \text{em que} \quad h = x_{k+1} - x_k.$$

Fenômeno de Runge

Seja p_n o polinômio que interpola f nos pontos

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

igualmente espaçados do intervalo $[a, b]$.

Perguntas:

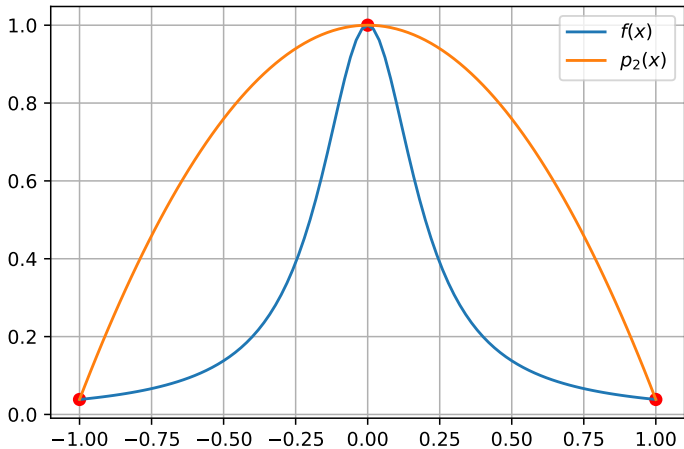
- Será que obtemos aproximações melhores de f aumentando n ?
- Em outras palavras, será que p_n converge para f quando $n \rightarrow \infty$?

Exemplo 1

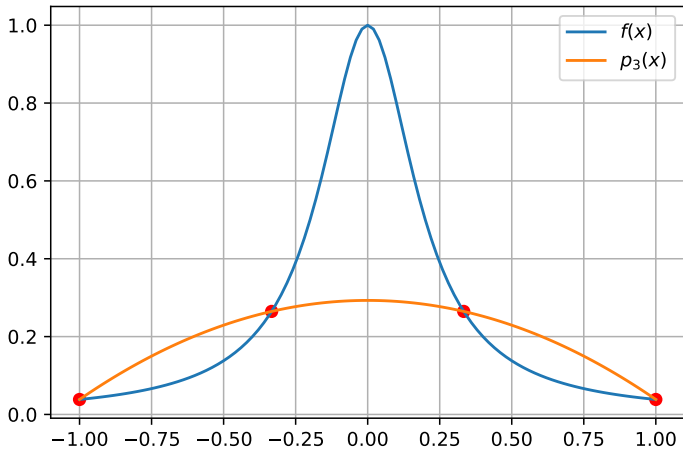
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, +1].$$

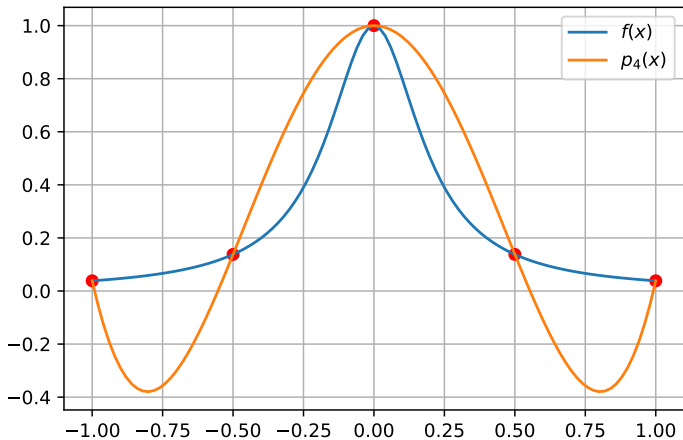
As próximas figuras mostram f e seu polinômio interpolador em nós igualmente espaçados do intervalo $[-1, 1]$.



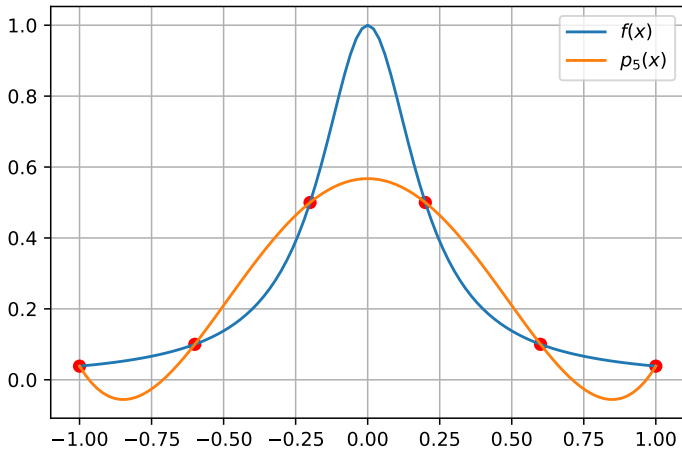
Polinômio de grau 2.



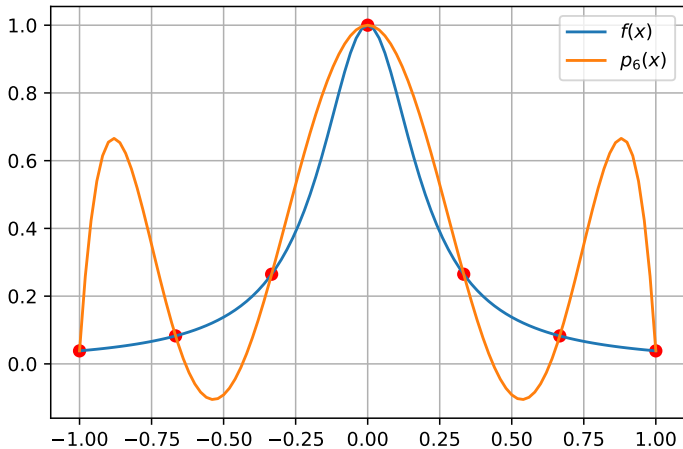
Polinômio de grau 3.



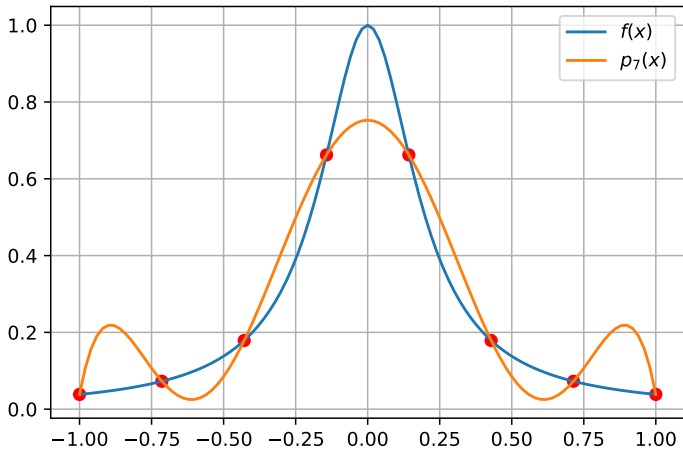
Polinômio de grau 4.



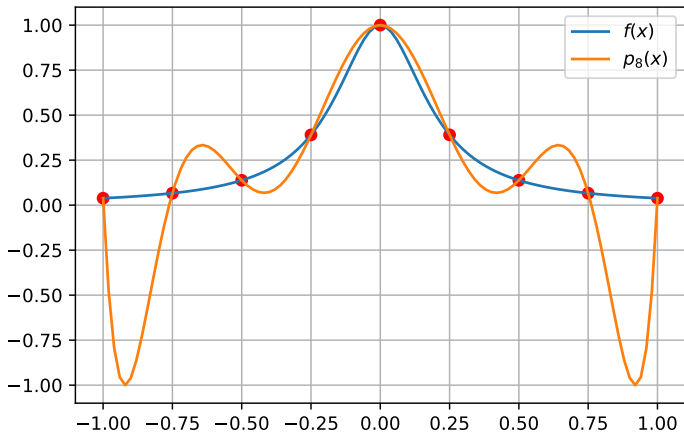
Polinômio de grau 5.



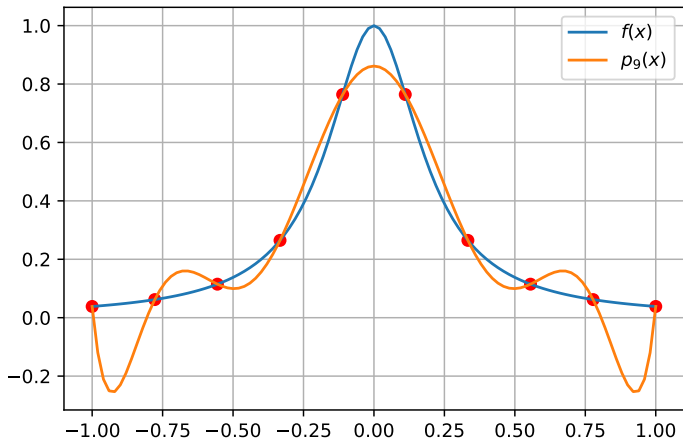
Polinômio de grau 6.



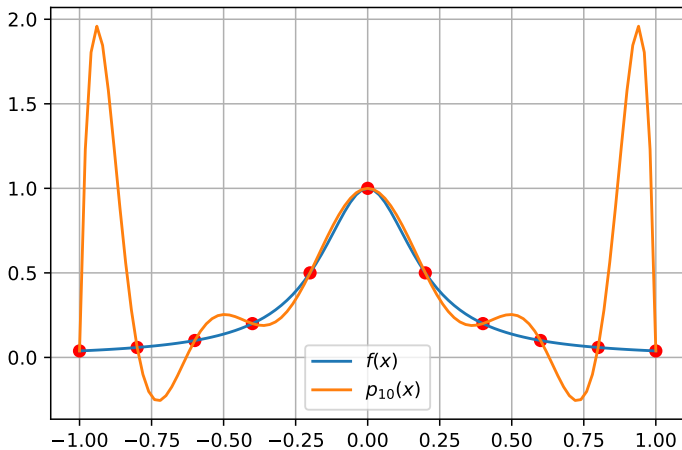
Polinômio de grau 7.



Polinômio de grau 8.



Polinômio de grau 9.



Polinômio de grau 10.

O exemplo anterior mostra o chamado **fenômeno de Runge**.

O exemplo anterior mostra o chamado **fenômeno de Runge**.

Respondendo as perguntas anteriores, não podemos garantir que $p_n \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$.

O exemplo anterior mostra o chamado **fenômeno de Runge**.

Respondendo as perguntas anteriores, não podemos garantir que $p_n \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$.

Com efeito, pode-se mostrar que

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p_n(x)|,$$

torna-se arbitrariamente grande para certas funções f , incluindo a função do exemplo anterior!

O exemplo anterior mostra o chamado **fenômeno de Runge**.

Respondendo as perguntas anteriores, não podemos garantir que $p_n \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$.

Com efeito, pode-se mostrar que

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p_n(x)|,$$

torna-se arbitrariamente grande para certas funções f , incluindo a função do exemplo anterior!

Lembre-se: Essas observações são válidas considerando pontos igualmente espaçados!

Nós de Chebyshev

Podemos obter um polinômio p_n que aproxima melhor f selecionando melhores nós de interpolação x_0, x_1, \dots, x_n .

Nós de Chebyshev

Podemos obter um polinômio p_n que aproxima melhor f selecionando melhores nós de interpolação x_0, x_1, \dots, x_n .

Em particular, os nós de Chebyshev dados por

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

distribuem o erro homogeneamente no intervalo $[a, b]$.

Nós de Chebyshev

Podemos obter um polinômio p_n que aproxima melhor f selecionando melhores nós de interpolação x_0, x_1, \dots, x_n .

Em particular, os nós de Chebyshev dados por

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

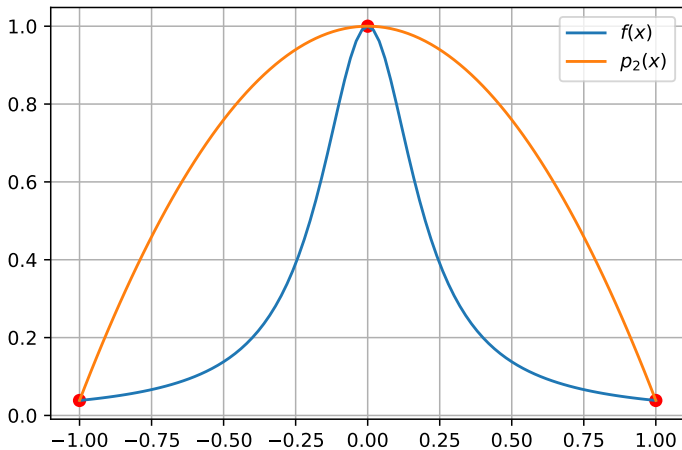
distribuem o erro homogeneamente no intervalo $[a, b]$.

Alternativamente, pode-se considerar os pontos

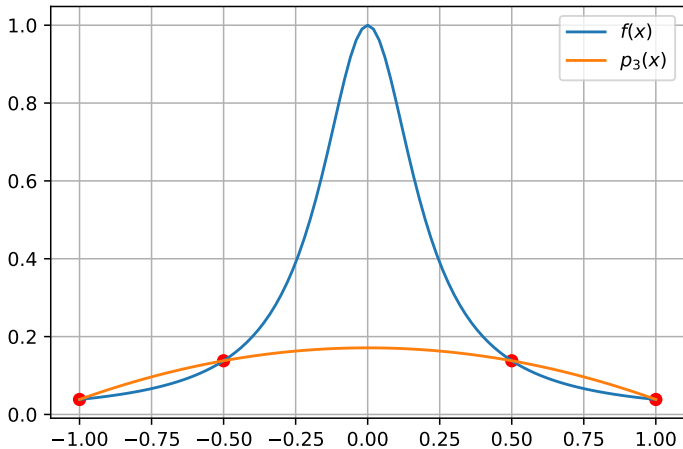
$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

Exemplo 2

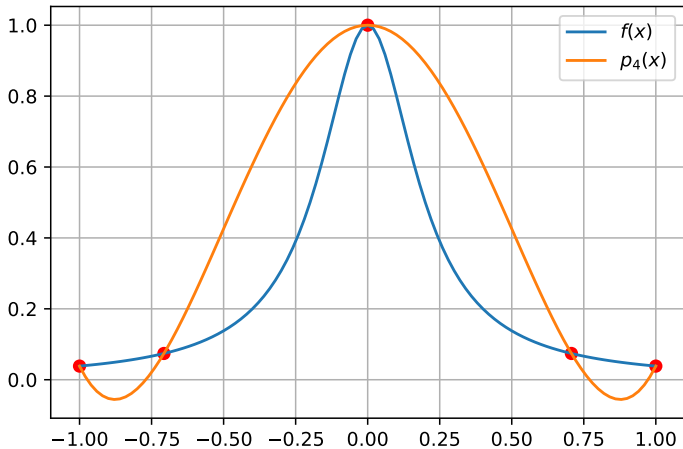
As próximas figuras mostram $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ e seu polinômio interpolador em nós de Chebyshev.



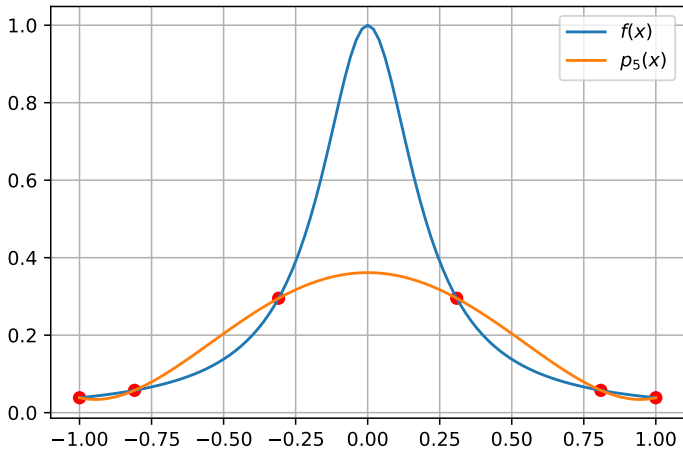
Polinômio de grau 2.



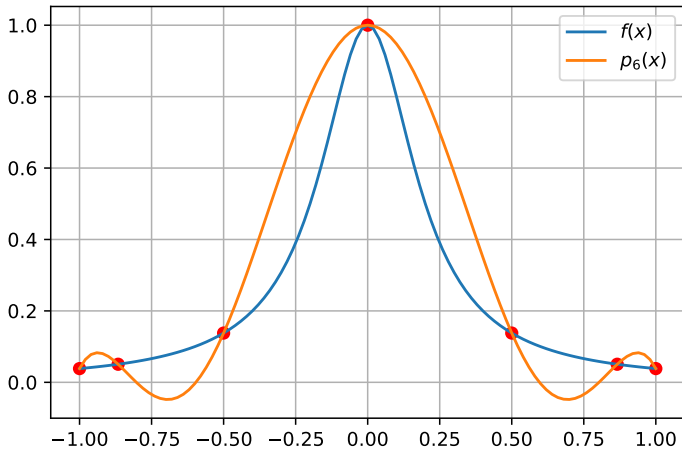
Polinômio de grau 3.



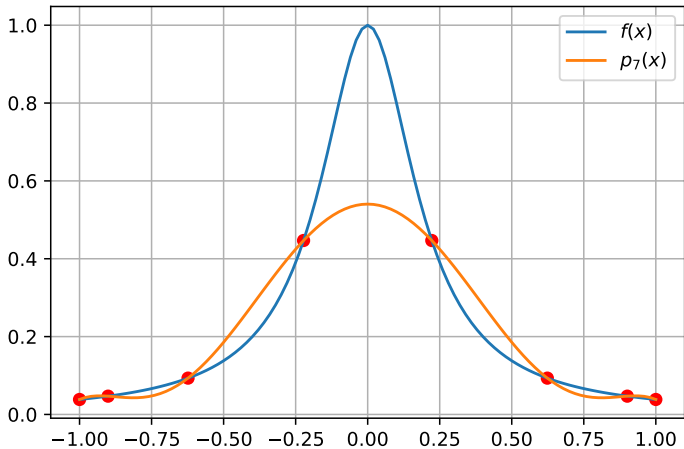
Polinômio de grau 4.



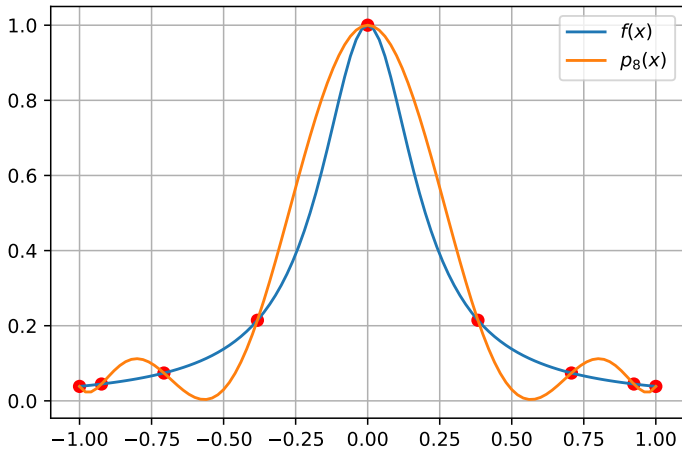
Polinômio de grau 5.



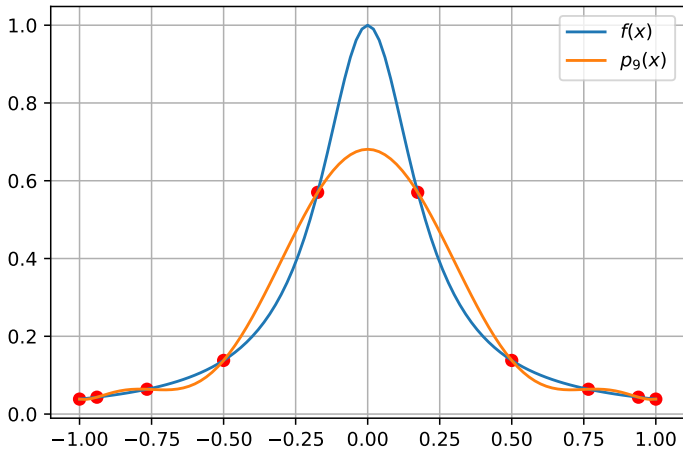
Polinômio de grau 6.



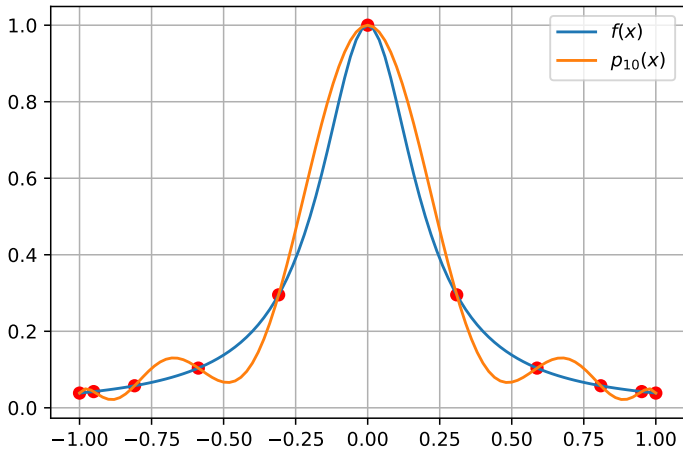
Polinômio de grau 7.



Polinômio de grau 8.



Polinômio de grau 9.



Polinômio de grau 10.

O exemplo anterior mostra que os nós de Chebyshev produzem melhores polinômios interpoladores.

O exemplo anterior mostra que os nós de Chebyshev produzem melhores polinômios interpoladores.

Com efeito, vale o seguinte teorema:

Teorema 3 (Interpolação Polinomial com Nós de Chebyshev)

Seja f uma função com derivadas até ordem $n + 1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos nós de Chebyshev x_0, \dots, x_n , então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{(x_n - x_0)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} M_{n+1},$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Interpolação por Partes

Em muitas situações práticas, porém, não temos a liberdade para escolher os nós de Chebyshev. Nesse caso, podemos utilizar interpolação por partes:

Definição 4 (Função Polinomial por Partes)

Dado pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, dizemos que Π_m é uma função polinomial por partes se Π_m é contínua em $[x_0, x_n]$ e é um polinômio de grau menor ou igual a m em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \dots, n$.

Exemplo 5

Encontre a função polinomial quadrática por partes que interpola a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

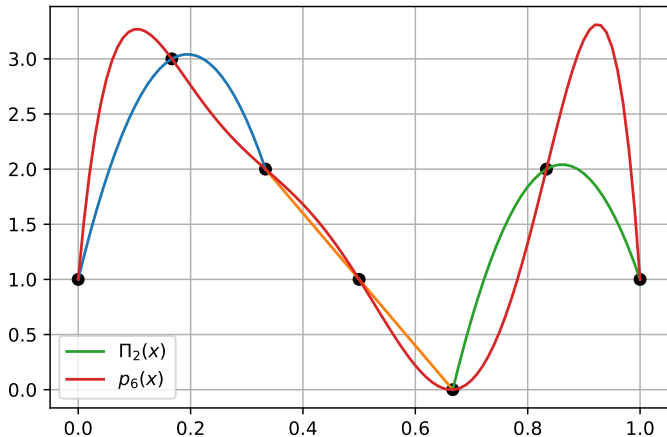
Exemplo 5

Encontre a função polinomial quadrática por partes que interpola a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

Resposta: O polinômio interpolador quadrático por partes é

$$\Pi_2(x) = \begin{cases} -54x^2 + 21x + 1, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ -6x + 4, & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ -54x^2 + 93x - 38, & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Polinômio interpolador p_6 e o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 .

Interpolação Linear por Partes

Dado uma tabela

x	x_0	x_1	\dots	x_n
f	y_0	y_1	\dots	y_n

o polinômio interpolador linear por partes é dado por

$$\Pi_1(x) = \begin{cases} y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots \\ y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ \vdots \\ y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}), & x_{n-1} \leq x \leq x_n. \end{cases}$$

Exemplo 6

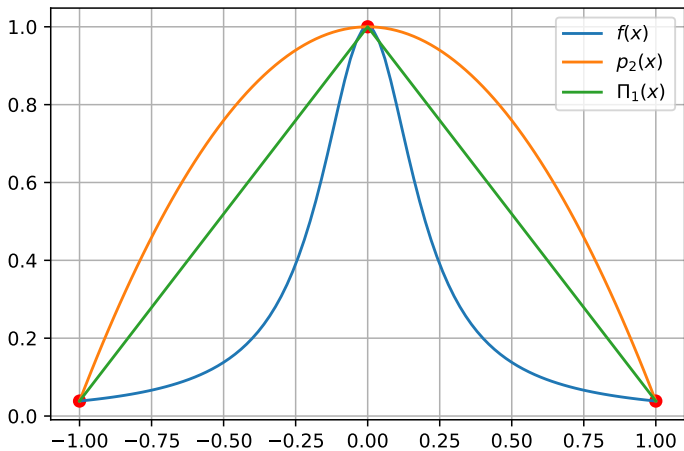
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, +1],$$

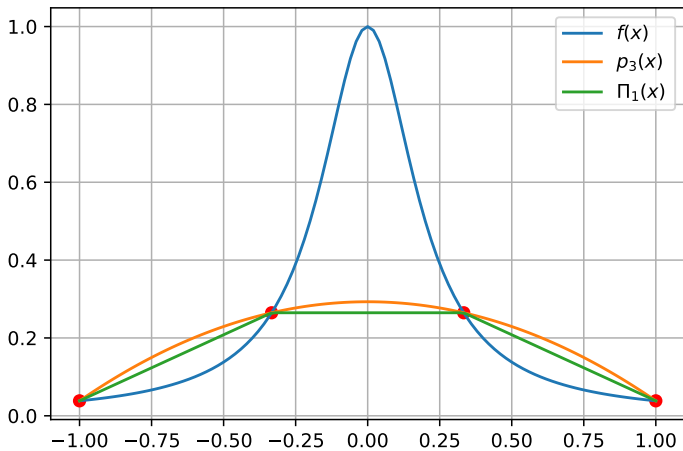
e nós

$$x_k = -1 + \frac{2}{n}k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

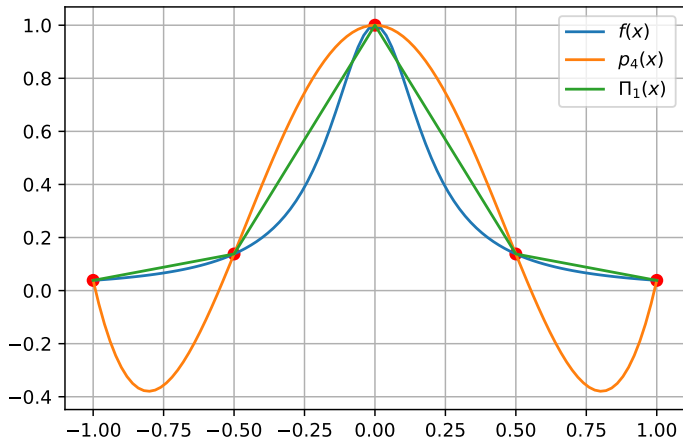
igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$. As próximas figuras mostram f , seu polinômio interpolador p_n e o polinômio interpolador linear por partes Π_1 .



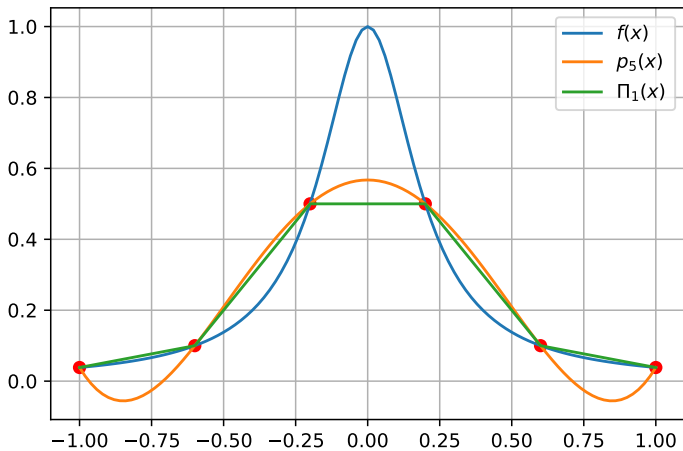
$n = 2.$



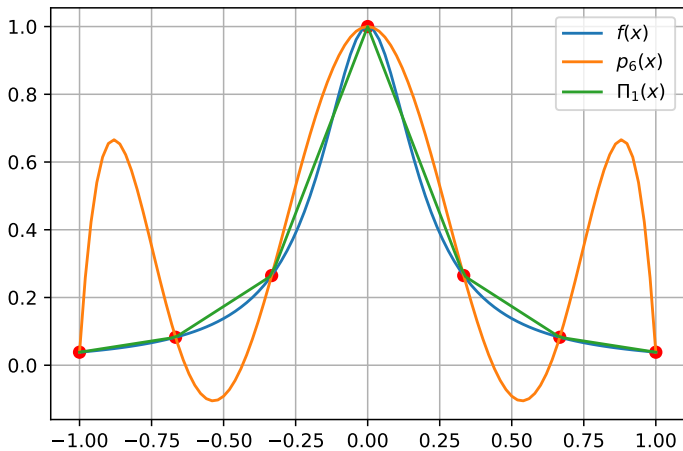
$n = 3.$



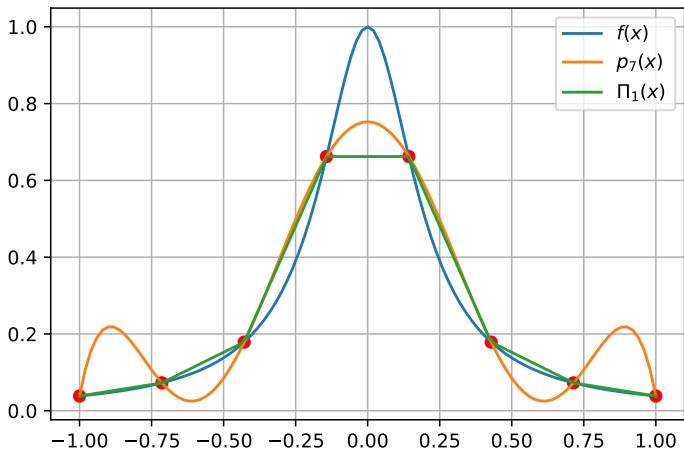
$n = 4.$



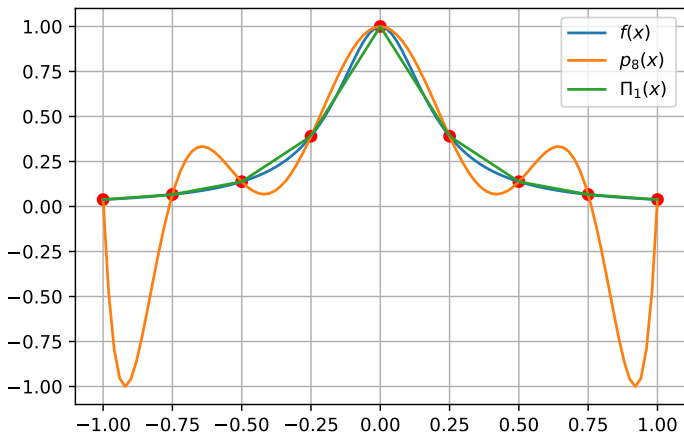
$n = 5.$



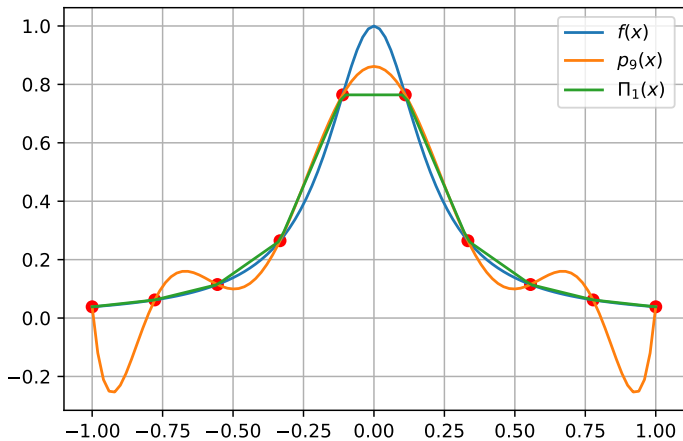
$n = 6.$



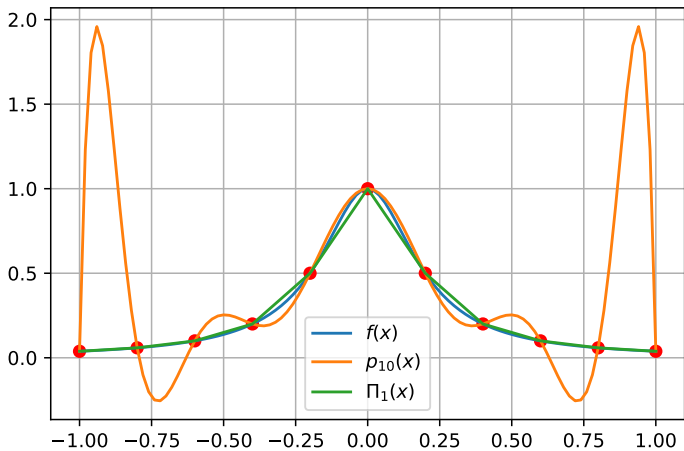
$n = 7.$



$n = 8.$



$n = 9.$



$n = 10.$

No exemplo anterior, os polinômios interpoladores linear por partes produziram resultados melhores que polinômios interpoladores.

No exemplo anterior, os polinômios interpoladores linear por partes produziram resultados melhores que polinômios interpoladores.

Com efeito, vale o seguinte teorema:

Teorema 7 (Erro da Interpolação Linear por Partes)

Considere uma função f com derivada de segunda ordem contínua em $[x_0, x_n]$. Se $y_k = f(x_k)$, para $k = 0, 1, \dots, n$, então o erro da interpolação linear por partes satisfaz

$$\mathcal{E}(x) = |f(x) - \Pi_1(x)| \leq \frac{M_2 H^2}{8}, \quad \forall x \in [x_0, x_n],$$

em que

$$M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f''(x)| \quad e \quad H = \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Note que $\Pi_1 \rightarrow f$ quando $H \rightarrow 0$ se f é suficientemente suave.

Splines Cúbicas

De um modo geral, se f é suficientemente suave, então o polinômio interpolador por partes $\Pi_m \rightarrow f$, mesmo que Π_m não seja suave!

Splines Cúbicas

De um modo geral, se f é suficientemente suave, então o polinômio interpolador por partes $\Pi_m \rightarrow f$, mesmo que Π_m não seja suave!

Muitas aplicações, por exemplo em computação gráfica, requerem que a aproximação seja suave, ou seja, possua pelo menos derivada contínua.

Splines Cúbicas

De um modo geral, se f é suficientemente suave, então o polinômio interpolador por partes $\Pi_m \rightarrow f$, mesmo que Π_m não seja suave!

Muitas aplicações, por exemplo em computação gráfica, requerem que a aproximação seja suave, ou seja, possua pelo menos derivada contínua.

Em vista disso, dados nós $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, consideramos polinômios cúbicos por partes \mathcal{S}_3 com as seguintes propriedades:

- \mathcal{S}_3 é um polinômio de grau menor ou igual à 3 em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.
- \mathcal{S}_3 tem derivadas de primeira e segunda ordem contínuas em $[x_0, x_n]$.

Funções com essas propriedades são chamadas **splines cúbicas**.

Sendo um caso particular de polinômios cúbicos por partes, uma spline cúbica é da forma

$$S_3(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ s_k(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \vdots & \\ s_n(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

em que

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

é um polinômio de grau no máximo 3.

Sendo um caso particular de polinômios cúbicos por partes, uma spline cúbica é da forma

$$S_3(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ s_k(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \vdots & \\ s_n(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

em que

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

é um polinômio de grau no máximo 3.

Note que uma spline cúbica é determinada por $4n$ parâmetros $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$.

Como \mathcal{S}_3 , \mathcal{S}'_3 e \mathcal{S}''_3 são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k) \quad \text{e} \quad s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k),$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Como \mathcal{S}_3 , \mathcal{S}'_3 e \mathcal{S}''_3 são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k) \quad \text{e} \quad s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k),$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Num problema de interpolação, devemos também ter $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, ou seja,

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Como \mathcal{S}_3 , \mathcal{S}'_3 e \mathcal{S}''_3 são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k) \quad \text{e} \quad s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k),$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Num problema de interpolação, devemos também ter $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, ou seja,

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Com isso, temos

$$3(n-1) + (n+1) = 4n - 2,$$

equações para determinar $4n$ incógnitas.

Como \mathcal{S}_3 , \mathcal{S}'_3 e \mathcal{S}''_3 são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k) \quad \text{e} \quad s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k),$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Num problema de interpolação, devemos também ter $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, ou seja,

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Com isso, temos

$$3(n-1) + (n+1) = 4n - 2,$$

equações para determinar $4n$ incógnitas.

Logo, temos duas condições em aberto que podem ser impostas, por exemplo, de acordo com informações físicas sobre o problema.

Spline Cúbica Natural

A **spline cúbica natural** é obtida impondo as condições

$$S_3''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad S_3''(x_n) = 0.$$

Spline Cúbica Natural

A **spline cúbica natural** é obtida impondo as condições

$$S_3''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad S_3''(x_n) = 0.$$

Pode-se mostrar que a spline cúbica natural é aquela de menor curvatura.

Spline Cúbica Natural

A **spline cúbica natural** é obtida impondo as condições

$$S_3''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad S_3''(x_n) = 0.$$

Pode-se mostrar que a spline cúbica natural é aquela de menor curvatura.

Manipulando as equações acima, concluímos que uma spline cúbica natural é obtida resolvendo um sistema linear tridiagonal

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

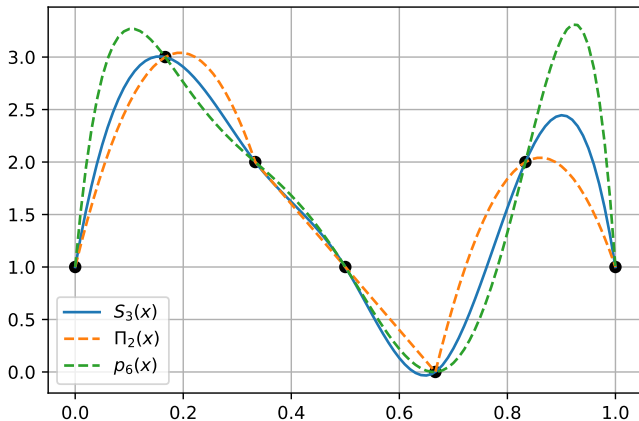
Detalhes sobre a formulação do sistema linear estão no material complementar dessa aula.

Exemplo 8

Considere a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

A próxima figura mostra o polinômio interpolador de grau p_6 , o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 e spline cúbica natural \mathcal{S}_3 .



Polinômio interpolador de grau p_6 , o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 e spline cúbica natural S_3 .

Exemplo 9

Considere a função

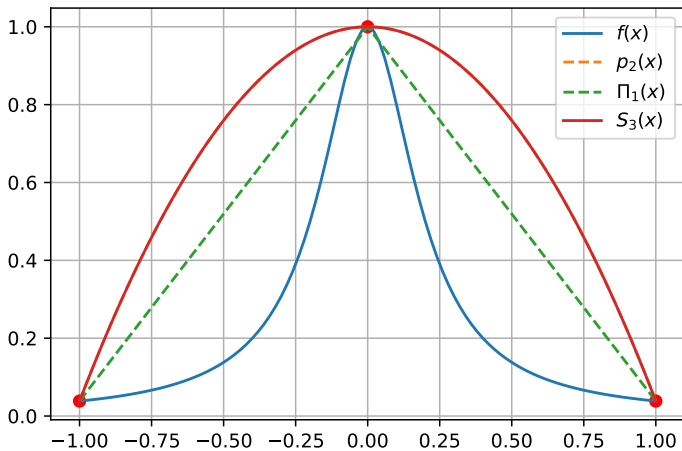
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, +1],$$

e nós

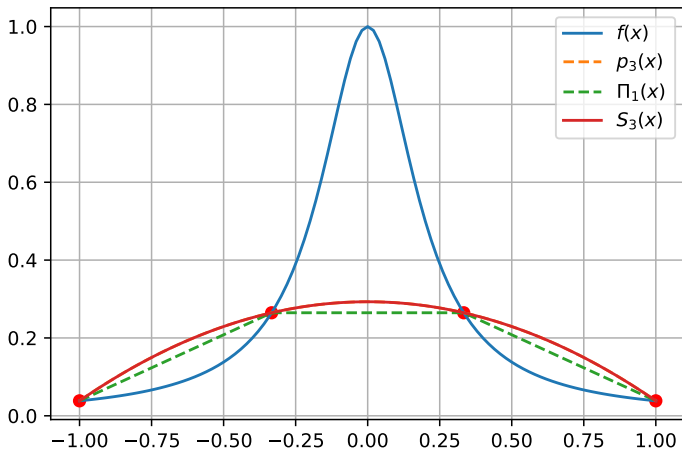
$$x_k = -1 + \frac{2}{n}k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$.

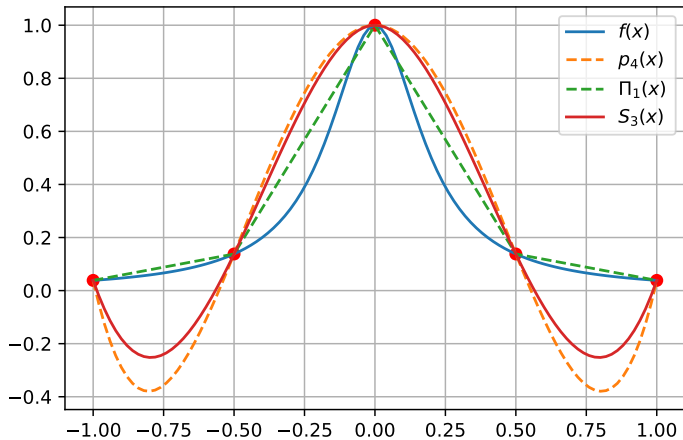
As próximas figuras mostram f , seu polinômio interpolador, o polinômio interpolador linear por partes e a spline cúbica natural.



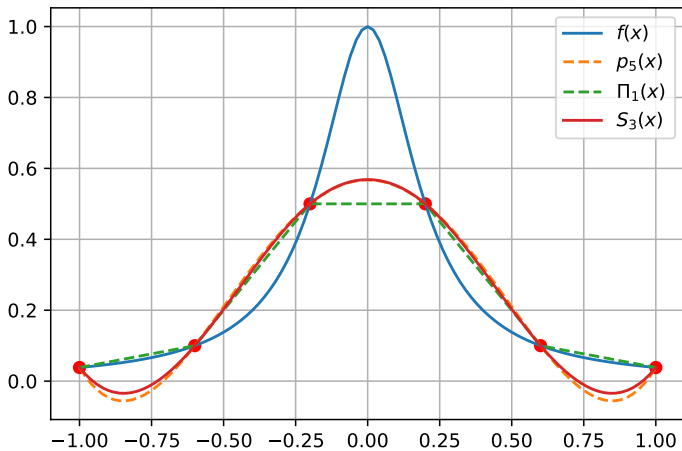
$n = 2.$



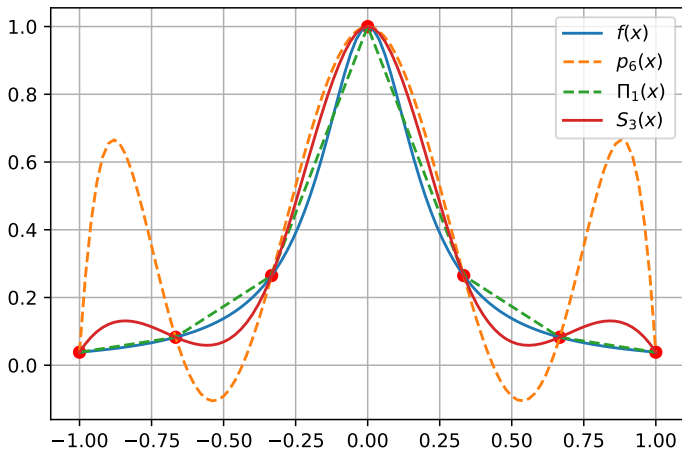
$n = 3.$



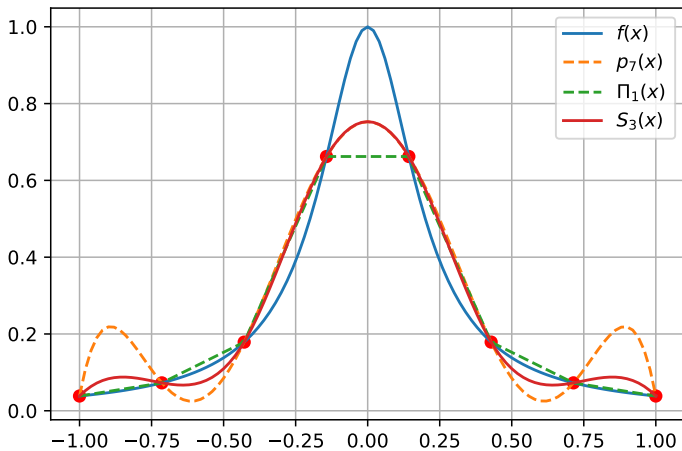
$n = 4.$



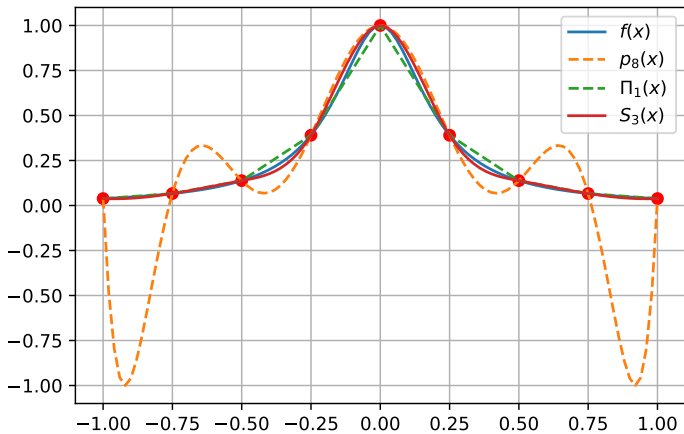
$n = 5.$



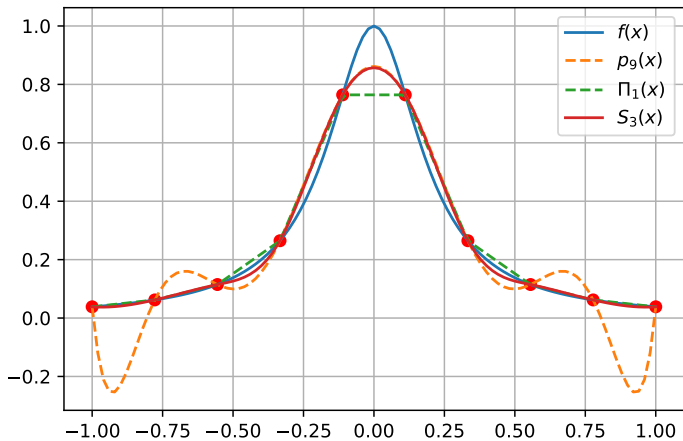
$n = 6.$



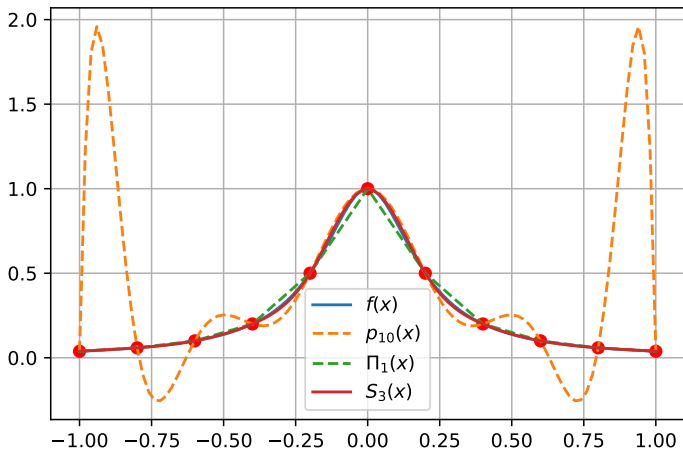
$n = 7.$



$n = 8.$



$n = 9.$



$n = 10.$

Considerações Finais

Iniciamos a aula de hoje comentando sobre o fenômeno de Runge e destacando que não podemos garantir $p_n(x) \rightarrow f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \rightarrow \infty$.

Considerações Finais

Iniciamos a aula de hoje comentando sobre o fenômeno de Runge e destacando que não podemos garantir $p_n(x) \rightarrow f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \rightarrow \infty$.

Apesar dessa observação, podemos obter melhores polinômios interpoladores considerando nós de Chebyshev.

Considerações Finais

Iniciamos a aula de hoje comentando sobre o fenômeno de Runge e destacando que não podemos garantir $p_n(x) \rightarrow f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \rightarrow \infty$.

Apesar dessa observação, podemos obter melhores polinômios interpoladores considerando nós de Chebyshev.

Uma alternativa efetiva para evitar o fenômeno de Runge é considerar interpolação polinomial por partes. Em particular, temos que $\Pi_1(x) \rightarrow f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \rightarrow \infty$.

Considerações Finais

Iniciamos a aula de hoje comentando sobre o fenômeno de Runge e destacando que não podemos garantir $p_n(x) \rightarrow f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \rightarrow \infty$.

Apesar dessa observação, podemos obter melhores polinômios interpoladores considerando nós de Chebyshev.

Uma alternativa efetiva para evitar o fenômeno de Runge é considerar interpolação polinomial por partes. Em particular, temos que $\Pi_1(x) \rightarrow f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente, as splines cúbicas são funções polinomiais por partes que interpolam suavemente um conjunto de pontos.

Muito grato pela atenção!