MS211 - Cálculo Numérico

Complemento da Aula 16 – Interpolação Polinomial Inversa.

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Na aula anterior, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar um polinômio p_n, de grau menor ou igual a n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Na aula anterior, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar um polinômio p_n, de grau menor ou igual a n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas, então

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n] \text{ para } \xi \in [x_0, x_n].$$

Na aula anterior, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar um polinômio p_n, de grau menor ou igual a n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas, então

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n] \text{ para } \xi \in [x_0, x_n].$$

Além disso, o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right|,$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Em particular, se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem pontos igualmente espaçados, então

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que $h = x_{k+1} - x_k$.

Em particular, se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem pontos igualmente espaçados, então

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que $h = x_{k+1} - x_k$.

Se temos apenas uma tabela

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

então

$$\mathcal{E}_n(x) \approx \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \left(\begin{array}{l} \text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1 \end{array} \right)$$

Interpolação Inversa

Problema:

Considere uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	$\dots$	$y_n = f(x_n)$

Dado $\eta \in (y_0, y_n)$, determine $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que $f(\xi) = \eta$.

Interpolação Inversa

Problema:

Considere uma tabela

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$y = f(x)$	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	$\ldots$	$y_n = f(x_n)$

Dado $\eta \in (y_0, y_n)$, determine $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que $f(\xi) = \eta$.

Basicamente, esse problema pode ser resolvido de duas maneiras:

- Determinando o polinômio p_n que interpola f em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e, em seguida, encontrando ξ tal que $p_n(\xi) = \eta$.

Interpolação Inversa

Problema:

Considere uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	$\dots$	$y_n = f(x_n)$

Dado $\eta \in (y_0, y_n)$, determine $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que $f(\xi) = \eta$.

Basicamente, esse problema pode ser resolvido de duas maneiras:

- Determinando o polinômio p_n que interpola f em $x_0, x_1, \dots, x_n$ e, em seguida, encontrando ξ tal que $p_n(\xi) = \eta$.
  Nesse caso, porém, não temos nenhuma estimativa sobre o erro.
- Utilizando interpolação inversa.

Se $f(x)$ é inversível num intervalo contendo η, então podemos determinar o polinômio q_n que interpola f^{-1} em $y_0, y_1, \ldots, y_n$ e definimos $\xi = q_n(\eta)$.

Se $f(x)$ é inversível num intervalo contendo η, então podemos determinar o polinômio q_n que interpola f^{-1} em $y_0, y_1, \ldots, y_n$ e definimos $\xi = q_n(\eta)$.

Nesse caso, podemos usar as fórmulas anteriores para estimar o erro da interpolação inversa!

Se $f(x)$ é inversível num intervalo contendo η, então podemos determinar o polinômio q_n que interpola f^{-1} em $y_0, y_1, \ldots, y_n$ e definimos $\xi = q_n(\eta)$.

Nesse caso, podemos usar as fórmulas anteriores para estimar o erro da interpolação inversa!

Uma condição para que uma função contínua f seja inversível em $[x_0, x_n]$ é que ela seja monótona (crescente ou decrescente).

Se $f(x)$ é inversível num intervalo contendo η, então podemos determinar o polinômio q_n que interpola f^{-1} em $y_0, y_1, \ldots, y_n$ e definimos $\xi = q_n(\eta)$.

Nesse caso, podemos usar as fórmulas anteriores para estimar o erro da interpolação inversa!

Uma condição para que uma função contínua f seja inversível em $[x_0, x_n]$ é que ela seja monótona (crescente ou decrescente).

Dada uma tabela, admitimos que f é **crescente** se

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_n,$$

e **decrescente** se

$$y_0 > y_1 > \ldots > y_n.$$

Exemplo 1

Considere a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Determine ξ tal que $e^{\xi} = 1.3165$ usando interpolação inversa quadrática e apresente uma estimativa para o erro.

Exemplo 1

Considere a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Determine ξ tal que $e^{\xi} = 1.3165$ usando interpolação inversa quadrática e apresente uma estimativa para o erro.

Resposta: O polinômio q_2 que interpola f^{-1} em

$$y_0 = 1.2214, \quad y_1 = 1.3499 \quad \text{e} \quad y_2 = 1.4918,$$

é

$$q_2(y) = 0.2 + (y - 1.2214)\Big(0.7782 - 0.2718(y - 1.3499)\Big).$$

Assim,

$$\xi \approx q_2(1.3165) = 0.27487.$$

Sabemos que o erro satisfaz

$$\mathcal{E}_2(y) \leq |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)\frac{M_3}{3!}.$$

Sendo $g(y) = \ln(y)$, temos $g'''(y) = \frac{2}{y^3}$. Logo,

$$M_3 = \max_{1.2214<y<1.4918} \left|\frac{2}{y^3}\right| = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976.$$

e, portanto,

$$\mathcal{E}_2(1.3165) \leq 0.0001.$$

Sabemos que o erro satisfaz

$$\mathcal{E}_2(y) \leq |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)\frac{M_3}{3!}.$$

Sendo $g(y) = \ln(y)$, temos $g'''(y) = \frac{2}{y^3}$. Logo,

$$M_3 = \max_{1.2214<y<1.4918} \left|\frac{2}{y^3}\right| = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976.$$

e, portanto,

$$\mathcal{E}_2(1.3165) \leq 0.0001.$$

Com efeito, sabemos que

$$e^{\xi} = 1.3165 \quad \iff \quad \xi = \ln(1.3165) = 0.27498.$$

Logo, o erro da interpolação inversa é de fato

$$\mathcal{E}_2(1.3165) = |\ln(1.3165) - q_2(1.3165)| = 0.0001.$$

Consideraçõs Finais

No complemento da aula de hoje comentamos sobre a interpolação inversa, ou seja, a interpolação da função inversa f^{-1}.

Consideraçõs Finais

No complemento da aula de hoje comentamos sobre a interpolação inversa, ou seja, a interpolação da função inversa f^{-1}.

A interpolação inversa pode ser usada para determinar ξ tal que $f(\xi) = \eta$.

Consideraçõs Finais

No complemento da aula de hoje comentamos sobre a interpolação inversa, ou seja, a interpolação da função inversa f^{-1}.

A interpolação inversa pode ser usada para determinar ξ tal que $f(\xi) = \eta$.

É importante destacar que a interpolação inversa é computacionalmente melhor (mais estável) que determinar a raiz de uma aproximação de f.

Consideraçõs Finais

No complemento da aula de hoje comentamos sobre a interpolação inversa, ou seja, a interpolação da função inversa f^{-1}.

A interpolação inversa pode ser usada para determinar ξ tal que $f(\xi) = \eta$.

É importante destacar que a interpolação inversa é computacionalmente melhor (mais estável) que determinar a raiz de uma aproximação de f.

Além disso, com a interpolação polinomial inversa podemos estimar o erro cometido ao calcular ξ tal que $f(\xi) = \eta$.

Muito grato pela atenção!