MS211 - Cálculo Numérico

Aula 22 – Análise do Erro na Interpolação Polinomial.

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Introdução

Na aula anterior, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar uma função φ tal que

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Introdução

Na aula anterior, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar uma função φ tal que

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Basicamente, vimos três formas para a interpolação polinomial:

1. **Forma de Vandermonde** – que apesar da simplicidade teórica, é computacionalmente caro além de ser numericamente instável.
2. **Forma de Lagrange** – que é rica do ponto de vista teórico mas também é computacionalmente cara.
3. **Forma de Newton**, em conjunto com os **parênteses encaixados**, é o forma computacionalmente mais eficiente para determinar o polinômio interpolador.

Definição do Erro de Interpolação

Na aula de hoje, vamos fazer uma análise do erro (supondo aritmética exata) na interpolação polinomial.

Definição do Erro de Interpolação

Na aula de hoje, vamos fazer uma análise do erro (supondo aritmética exata) na interpolação polinomial.

Formalmente, vamos assumir os pontos tabelados $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ são tais que

$$y_k = f(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que f é a função que iremos aproximar por um polinômio interpolador p_n de grau menor ou igual à n.

Definição do Erro de Interpolação

Na aula de hoje, vamos fazer uma análise do erro (supondo aritmética exata) na interpolação polinomial.

Formalmente, vamos assumir os pontos tabelados $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ são tais que

$$y_k = f(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que f é a função que iremos aproximar por um polinômio interpolador p_n de grau menor ou igual à n.

O erro $\mathcal{E}_n$ da interpolação polinomial em $x \in [x_0, x_n]$ é

$$\mathcal{E}_n(x) = |f(x) - p_n(x)|.$$

Teorema 1 (Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ *pontos* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$*, com* $n \geq 0$*. Seja* f *uma função com derivadas até ordem* $n+1$ *contínuas no intervalo* $[x_0, x_n]$*. Se* p_n *é o polinômio que interpola* f *nos pontos* $x_0, \ldots, x_n$*, então*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left[\prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right], \quad \forall x \in [x_0, x_n],$$

em que $x_0 \leq \xi \leq x_n$*.*

Demonstração do Teorema 1

Primeiramente, vamos definir

$$
\begin{aligned}
\pi(x) &= \prod_{k=0}^{n}(x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \\
&= x^{n+1} + \beta_n x^n + \ldots + \beta_1 x + \beta_0.
\end{aligned}
$$

Demonstração do Teorema 1

Primeiramente, vamos definir

$$\pi(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$
$$= x^{n+1} + \beta_n x^n + \ldots + \beta_1 x + \beta_0.$$

Vamos mostrar que

$$f(x) - p_n(x) = \pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

Demonstração do Teorema 1

Primeiramente, vamos definir

$$\pi(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$
$$= x^{n+1} + \beta_n x^n + \ldots + \beta_1 x + \beta_0.$$

Vamos mostrar que

$$f(x) - p_n(x) = \pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

Se $x = x_k$, então $\pi(x) = 0$. Portanto, $f(x_k) = p_n(x_k)$, como é de se esperar uma vez que p_n interpola f em x_k.

Se $x \neq x_k$, defina a função auxiliar (assumindo x fixo):

$$\mathcal{A}(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}\pi(t), \quad \forall t \in [x_0, x_n].$$

Se $x \neq x_k$, defina a função auxiliar (assumindo x fixo):

$$\mathcal{A}(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}\pi(t), \quad \forall t \in [x_0, x_n].$$

Note que

$$\mathcal{A}(x_0) = 0, \mathcal{A}(x_1) = 0, \ldots, \mathcal{A}(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(x) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ possui $n+2$ raízes em $[x_0, x_n]$.

Se $x \neq x_k$, defina a função auxiliar (assumindo x fixo):

$$\mathcal{A}(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}\pi(t), \quad \forall t \in [x_0, x_n].$$

Note que

$$\mathcal{A}(x_0) = 0, \mathcal{A}(x_1) = 0, \dots, \mathcal{A}(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(x) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ possui $n+2$ raízes em $[x_0, x_n]$.

Pelo teorema de Rolle (caso particular do teorema do valor médio), $\mathcal{A}'$ possui $n+1$ raízes em (x_0, x_n).

Se $x \neq x_k$, defina a função auxiliar (assumindo x fixo):

$$\mathcal{A}(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}\pi(t), \quad \forall t \in [x_0, x_n].$$

Note que

$$\mathcal{A}(x_0) = 0, \mathcal{A}(x_1) = 0, \ldots, \mathcal{A}(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(x) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ possui $n+2$ raízes em $[x_0, x_n]$.

Pelo teorema de Rolle (caso particular do teorema do valor médio), $\mathcal{A}'$ possui $n+1$ raízes em (x_0, x_n).

Novamente pelo teorema de Rolle, $\mathcal{A}''$ possui n raízes em (x_0, x_n).

Se $x \neq x_k$, defina a função auxiliar (assumindo x fixo):

$$\mathcal{A}(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}\pi(t), \quad \forall t \in [x_0, x_n].$$

Note que

$$\mathcal{A}(x_0) = 0, \mathcal{A}(x_1) = 0, \ldots, \mathcal{A}(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(x) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ possui $n+2$ raízes em $[x_0, x_n]$.

Pelo teorema de Rolle (caso particular do teorema do valor médio), $\mathcal{A}'$ possui $n+1$ raízes em (x_0, x_n).

Novamente pelo teorema de Rolle, $\mathcal{A}''$ possui n raízes em (x_0, x_n).

Aplicando repetidas vezes o teorema de Rolle, concluímos que $\mathcal{A}^{(n+1)}$ possui uma raiz $\xi \in (x_0, x_n)$.

Concluindo,

$$\mathcal{A}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}(n+1)! = 0.$$

Concluindo,

$$\mathcal{A}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}(n+1)! = 0.$$

Logo,

$$f(x) - p_n(x) = \pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

$\square$

Interpolação × Aproximação de Taylor

A aproximação de Taylor de f em x_0 é

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Sobretudo, a aproximação de Taylor satisfaz

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Interpolação $\times$ Aproximação de Taylor

A aproximação de Taylor de f em x_0 é

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Sobretudo, a aproximação de Taylor satisfaz

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Note que essa aproximação de Taylor é obtida considerando as derivadas de f apenas no ponto x_0.

Interpolação × Aproximação de Taylor

A aproximação de Taylor de f em x_0 é

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Sobretudo, a aproximação de Taylor satisfaz

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Note que essa aproximação de Taylor é obtida considerando as derivadas de f apenas no ponto x_0.

Na interpolação polinomial, p_n é determinado aproximando f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Portanto,

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n).$$

Teorema 2 (Majorante do Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ e f uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$, então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Demonstração do Teorema 2

Sendo $f^{(n+1)}$ contínua em $[x_0, x_n]$, $|f^{(n+1)}|$ admite um valor máximo M_{n+1}. Consequentemente, pelo Teorema 1, tem-se

$$\mathcal{E}(x) = \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

pois $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$.

Teorema 3 (Majorante do Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ *pontos igualmente espaçados*

$$x_k = x_0 + kh, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

e f *uma função com derivadas até ordem* $n+1$ *contínuas no intervalo* $[x_0, x_n]$. *Se* p_n *é o polinômio que interpola* f *nos pontos* $x_0, \ldots, x_n$, *então o erro da interpolação polinomial satisfaz*

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Exemplo 4

Suponha que desejamos obter $\ln(3.7)$ conhecendo a tabela:

x	1	2	3	4
$\ln(x)$	0	0.6931	1.0986	1.3863

Apresente a aproximação para $\ln(3.7)$ e uma estimativa para o seu erro usando interpolação linear.

Resposta: Tomando $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$, obtemos

$$p_1(x) = 1.0986 + 0.2877(x - 3).$$

Desse modo, $p_1(3.7) = 1.3000$, enquanto $\ln(3.7) = 1.3083$.
O erro da interpolação polinomial é

$$\mathcal{E}_1(3.7) = |\ln(3.7) - p_1(3.7)| = 0.0083.$$

Pelos Teoremas 2 e 3, temos

$$M_2 = \max_{x \in [3,4]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{9}.$$

Logo, encontramos respectivamente as estimativas

$$\mathcal{E}_1(3.7) \leq \frac{(1/9)}{2!} |(3.7 - 3)(3.7 - 4)| = 0.011667,$$

e

$$\mathcal{E}_1(3.7) \leq \frac{(1/9)1^2}{4(2)} = 0.013889.$$

Estimativa para o Erro de Interpolação Polinomial

Se temos apenas uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

o erro da interpolação polinomial $\mathcal{E}_n(x)$ pode ser estimado aproximando $M_{n+1}/(n+1)!$ pelo maior valor absoluto das diferenças divididas de ordem $n+1$, ou seja,

$$\mathcal{E}_n(x) \approx \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \begin{pmatrix} \text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5

Considere a tabela

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
y	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Aproxime $f(0.47)$ usando um polinômio de grau 2.

(b) Forneça uma estimativa para o erro de interpolação.

Resposta: Construímos a tabela com as diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.43		
0.34	0.22		2.02	
		0.83		-17.9
0.4	0.27		-3.7	
		0.17		18.2
0.52	0.29		1.04	
		0.38		-2.6
0.6	0.32		0.21	
		0.42		
0.72	0.37			

(a) Escolhendo $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.52$ e $x_3 = 0.6$, encontramos

$$p_2(x) = 0.27 + (x - 0.4)\Big(0.17 + (x - 0.52)1.04\Big).$$

Logo, $f(0.47) \approx p_2(0.47) = 0.28$.

(b) O erro de interpolação satisfaz

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2(0.47) &\approx |(0.47 - 0.4)(0.47 - 0.52)(0.47 - 0.6)18.2| \\ &= 8.28 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

A estimativa baseada na diferença divida é fundamentada no teorema:

Teorema 6

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in (x_0, x_n) \quad e \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

Demonstração do Teorema 6

O único polinômio que interpola f em $x_0, x_1, \dots, x_n$ é

$$\begin{aligned} p_n(\xi) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](\xi - x_0) + \dots \\ &+ f[x_0, \dots, x_n](\xi - x_0)\dots(\xi - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6

O único polinômio que interpola f em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é

$$p_n(\xi) = f[x_0] + f[x_0, x_1](\xi - x_0) + \ldots \\ + f[x_0, \ldots, x_n](\xi - x_0) \ldots (\xi - x_{n-1}).$$

Analogamente, o polinômio que interpola f em $x_0, \ldots, x_n, x$ é

$$p_{n+1}(\xi) = f[x_0] + f[x_0, x_1](\xi - x_0) + \ldots \\ + f[x_0, \ldots, x_n](\xi - x_0) \ldots (\xi - x_{n-1}) + \ldots \\ + f[x_0, \ldots, x_n, x](\xi - x_0) \ldots (\xi - x_{n-1})(x - x_n)$$

Demonstração do Teorema 6

O único polinômio que interpola f em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é

$$p_n(\xi) = f[x_0] + f[x_0, x_1](\xi - x_0) + \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](\xi - x_0)\ldots(\xi - x_{n-1}).$$

Analogamente, o polinômio que interpola f em $x_0, \ldots, x_n, x$ é

$$\begin{aligned} p_{n+1}(\xi) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](\xi - x_0) + \ldots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n](\xi - x_0)\ldots(\xi - x_{n-1}) + \ldots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n, x](\xi - x_0)\ldots(\xi - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned}$$

Observe que

$$p_{n+1}(\xi) = p_n(\xi) + f[x_0, \ldots, x_n, x](\xi - x_0)\ldots(\xi - x_{n-1})(\xi - x_n)$$

Além disso, como $p_{n+1}(x) = f(x)$, temos

$$f(x) - p_n(\xi) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Além disso, como $p_{n+1}(x) = f(x)$, temos

$$f(x) - p_n(\xi) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Do Teorema 1, temos

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

em que $\xi \in (x_0, x_n)$.

Além disso, como $p_{n+1}(x) = f(x)$, temos

$$f(x) - p_n(\xi) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Do Teorema 1, temos

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

em que $\xi \in (x_0, x_n)$.

Comparando as duas equações, concluímos que

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Escolha do Grau do Polinômio Interpolador

A tabela das diferenças divididas pode auxiliar na escolha do grau do polinômio interpolador:

Escolha do Grau do Polinômio Interpolador

O polinômio de grau n aproximará bem a função se as diferenças divididas de ordem n são praticamente constantes ou se as diferenças divididas de ordem $n+1$ são próximas de zero.

Exemplo 7

Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$ cuja tabela das diferenças dividas é:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		-0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Dessa forma, dizemos que um polinômio de grau 1 fornece uma boa aproximação para $f(x) = \sqrt{x}$ em $[1, 1.05]$.

Consideraçõs Finais

Na aula de hoje apresentamos uma fórmula para o erro da interpolação polinomial que depende da derivada $f^{(n+1)}$ da função que estamos aproximando.

Consideraçõs Finais

Na aula de hoje apresentamos uma fórmula para o erro da interpolação polinomial que depende da derivada $f^{(n+1)}$ da função que estamos aproximando.

Apresentamos também majorantes para o erro de interpolação.

Consideraçõs Finais

Na aula de hoje apresentamos uma fórmula para o erro da interpolação polinomial que depende da derivada $f^{(n+1)}$ da função que estamos aproximando.

Apresentamos também majorantes para o erro de interpolação.

Vimos que as diferenças divididas podem ser usadas para estimar o erro quando temos apenas uma tabela de pontos (e não conhecemos a função).

Consideraçõs Finais

Na aula de hoje apresentamos uma fórmula para o erro da interpolação polinomial que depende da derivada $f^{(n+1)}$ da função que estamos aproximando.

Apresentamos também majorantes para o erro de interpolação.

Vimos que as diferenças divididas podem ser usadas para estimar o erro quando temos apenas uma tabela de pontos (e não conhecemos a função).

Finalmente, o polinômio de grau n aproximará bem a função se as diferenças divididas de ordem n são praticamente constantes ou se as diferenças divididas de ordem $n+1$ são próximas de zero.

Muito grato pela atenção!