MS211 - Cálculo Numérico

Aula 18 – Problemas de Valor de Contorno (Parte 2).

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos o método das diferenças finitas para resolução de um problema de valor de contorno linear

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ v(a) = \gamma_a, \\ v(b) = \gamma_b. \end{cases}$$

Introdução

Na aula anterior, apresentamos o método das diferenças finitas para resolução de um problema de valor de contorno linear

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ v(a) = \gamma_a, \\ v(b) = \gamma_b. \end{cases}$$

Na aula de hoje aplicaremos o método das diferenças finitas para um problema de valor de contorno linear dado por:

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ v'(a) = \gamma_a, \\ v(b) = \gamma_b, \end{cases}$$

no qual uma das condições de contorno envolve a derivada de v.

Aproximações Numéricas

No método das diferenças finitas, primeiro definimos a malha

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1, \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n+1},$$

que divide o intervalo $[a, b]$ em $n + 1$ sub-intervalos.

Aproximações Numéricas

No método das diferenças finitas, primeiro definimos a malha

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1, \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n+1},$$

que divide o intervalo $[a, b]$ em $n+1$ sub-intervalos.

Além disso, consideramos as seguintes aproximações para os pontos no interior da malha, isto é, para $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
v(x_k) &\approx v_k, \\
v'(x_k) &\approx \frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2h}, && \text{(diferença centrada}, \mathcal{O}(h^2)), \\
v''(x_k) &\approx \frac{v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1}}{h^2}, && (\mathcal{O}(h^2)).
\end{aligned}$$

Discretização da Equação Diferencial

Substituindo as aproximações das diferenças finitas na equação diferencial

$$v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x),$$

Discretização da Equação Diferencial

Substituindo as aproximações das diferenças finitas na equação diferencial

$$v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x),$$

encontramos as seguintes equações:

$$\frac{v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1}}{h^2} = A_k \left(\frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2h} \right) + B_k v_k + C_k,$$

em que $A_k = A(x_k)$, $B_k = B(x_k)$ e $C_k = C(x_k)$.

Discretização da Equação Diferencial

Substituindo as aproximações das diferenças finitas na equação diferencial

$$v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x),$$

encontramos as seguintes equações:

$$\frac{v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1}}{h^2} = A_k \left(\frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2h} \right) + B_k v_k + C_k,$$

em que $A_k = A(x_k)$, $B_k = B(x_k)$ e $C_k = C(x_k)$.

Multiplicando a equação acima por $-h^2$ e isolando os termos v_{k-1}, v_k e v_{k+1}, obtemos:

$$r_k v_{k-1} + p_k v_k + q_k v_{k+1} = -h^2 C_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

em que

$$p_k = 2 + B_k h^2, \quad q_k = -1 + \frac{A_k h}{2} \quad \text{e} \quad r_k = -1 - \frac{A_k h}{2}. \tag{2}$$

Usando a diferença centrada, podemos aproximar a condição de contorno $v'(a) = v'(x_0) = \gamma_a$ por

$$\frac{v_1 - v_{-1}}{2h} = \gamma_a,$$

em que v_{-1} é um ponto adicional artificial.

Usando a diferença centrada, podemos aproximar a condição de contorno $v'(a) = v'(x_0) = \gamma_a$ por

$$\frac{v_1 - v_{-1}}{2h} = \gamma_a,$$

em que v_{-1} é um ponto adicional artificial.

A condição de contorno resulta na equação:

$$v_{-1} = v_1 - 2h\gamma_a.$$

Usando a diferença centrada, podemos aproximar a condição de contorno $v'(a) = v'(x_0) = \gamma_a$ por

$$\frac{v_1 - v_{-1}}{2h} = \gamma_a,$$

em que v_{-1} é um ponto adicional artificial.

A condição de contorno resulta na equação:

$$v_{-1} = v_1 - 2h\gamma_a.$$

Dessa forma, considerando $k = 0$, obtemos de (1) a equação:

$$r_0 v_{-1} + p_0 v_0 + q_0 v_1 = -h^2 C_0.$$

Usando a diferença centrada, podemos aproximar a condição de contorno $v'(a) = v'(x_0) = \gamma_a$ por

$$\frac{v_1 - v_{-1}}{2h} = \gamma_a,$$

em que v_{-1} é um ponto adicional artificial.

A condição de contorno resulta na equação:

$$v_{-1} = v_1 - 2h\gamma_a.$$

Dessa forma, considerando $k = 0$, obtemos de (1) a equação:

$$r_0 v_{-1} + p_0 v_0 + q_0 v_1 = -h^2 C_0.$$

Substituindo v_{-1} por $v_1 - 2h\gamma_a$, encontramos:

$$p_0 v_0 + (q_0 + r_0) v_1 = -h^2 C_0 + 2h\gamma_a r_0.$$

Finalmente, a condição de contorno $v(b) = v(x_{n+1}) = \gamma_b$ resulta na equação

$$v_{n+1} = \gamma_b.$$

Finalmente, a condição de contorno $v(b) = v(x_{n+1}) = \gamma_b$ resulta na equação

$$v_{n+1} = \gamma_b.$$

Tomando $k = n$ em (1), obtemos a equação:

$$r_n v_{n-1} + p_n v_n + q_n v_{n+1} = -h^2 C_n.$$

Finalmente, a condição de contorno $v(b) = v(x_{n+1}) = \gamma_b$ resulta na equação

$$v_{n+1} = \gamma_b.$$

Tomando $k = n$ em (1), obtemos a equação:

$$r_n v_{n-1} + p_n v_n + q_n v_{n+1} = -h^2 C_n.$$

Equivalentemente, temos

$$r_n v_{n-1} + p_n v_n = -h^2 C_n - q_n \gamma_b.$$

Sistema Linear Tridiagonal

As equações acima podem ser escritas como o seguinte sistema linear tridiagonal com $n+1$ incógnitas:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_0 & (r_0+q_0) & & & \\ r_1 & p_1 & q_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r_{n-1} & p_{n-1} & q_{n-1} \\ & & & r_n & p_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2h\gamma_a r_0 - h^2 C_0 \\ -h^2 C_2 \\ \vdots \\ -h^2 C_{n-1} \\ -q_n\gamma_b - h^2 C_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Sistema Linear Tridiagonal

As equações acima podem ser escritas como o seguinte sistema linear tridiagonal com $n+1$ incógnitas:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_0 & (r_0+q_0) & & & \\ r_1 & p_1 & q_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r_{n-1} & p_{n-1} & q_{n-1} \\ & & & r_n & p_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2h\gamma_a r_0 - h^2 C_0 \\ -h^2 C_2 \\ \vdots \\ -h^2 C_{n-1} \\ -q_n\gamma_b - h^2 C_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Portanto, uma aproximação para a solução de um PVC

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ v'(a) = \gamma_1 \quad \text{e} \quad v(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pode ser obtida resolvendo o sistema linear $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$.

Exemplo 1

Use o método das diferenças finitas para obter uma aproximação do PVC linear

$$\begin{cases} v''(x) + 2v'(x) + v(x) = 2e^{-x}, \\ v'(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(1) = 1, \end{cases}$$

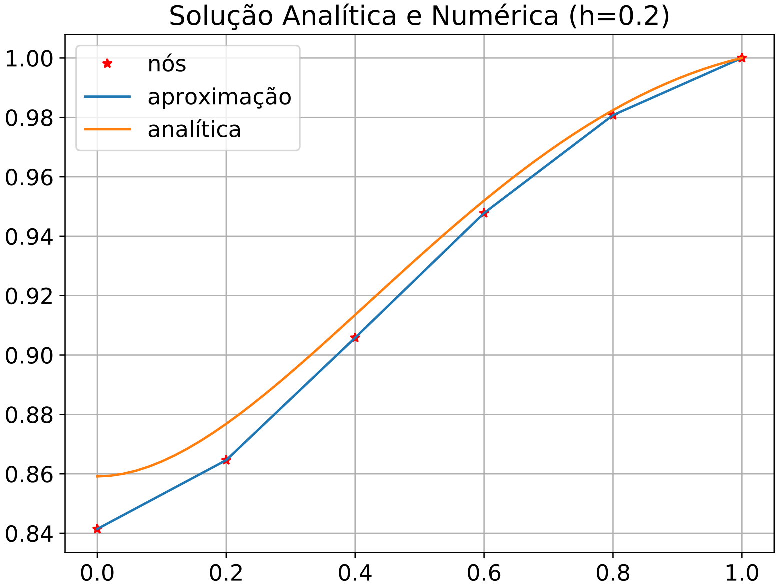
para $0 \leq x \leq 1$, considerando $h = 0.2$ e $h = 0.1$.
Compare os resultados obtidos com a solução exata

$$v(x) = \frac{1}{2}(2x^2 + (e-1)x + e - 1)e^{-x}.$$

Resolução: Para $h = 0.2$, as aproximações $v_0, v_1, \ldots, v_5$ da solução do PVC nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_5$ são obtidas resolvendo o sistema linear 5×5 dado por

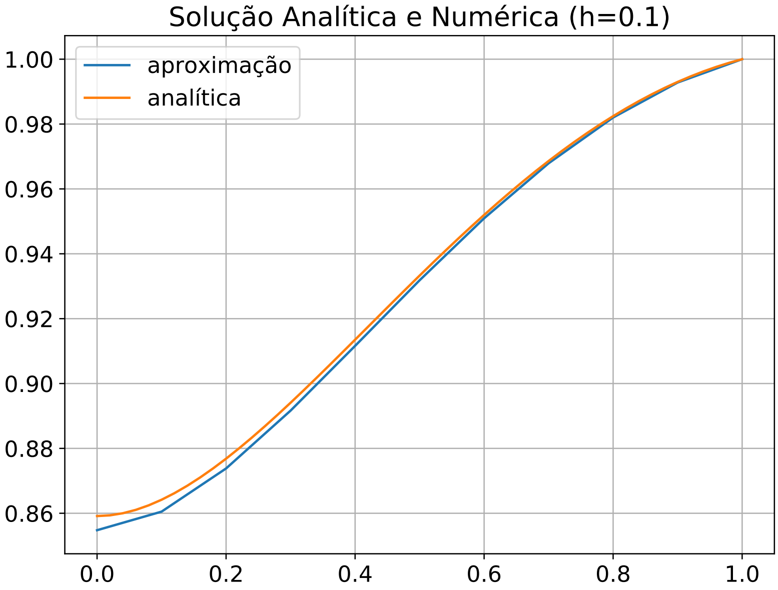
$$\begin{bmatrix} -1.96 & 2. & 0. & 0. & 0. \\ 0.8 & -1.96 & 1.2 & 0. & 0. \\ 0. & 0.8 & -1.96 & 1.2 & 0. \\ 0. & 0. & 0.8 & -1.96 & 1.2 \\ 0. & 0. & 0. & 0.8 & -1.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.06 \\ 0.05 \\ 0.04 \\ -1.16 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema encontramo o seguinte gráficos:

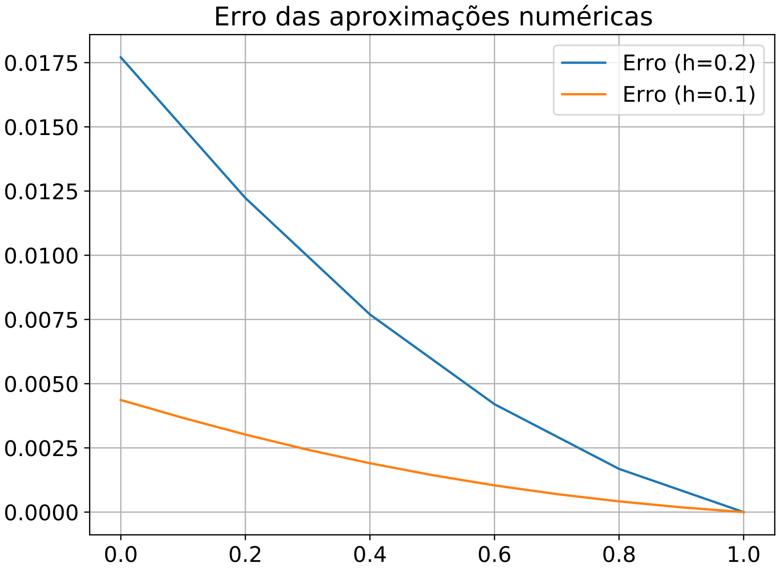


Solução Analítica e Numérica (h=0.2)
nós
aproximação
analítica
1.00
0.98
0.96
0.94
0.92
0.90
0.88
0.86
0.84
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Analogamente, considerando $h = 0.1$, encontramos o gráfico:



O erro das aproximações foram:



Especificamente, temos os erros globais:

- Para $h = 0.2$, o erro global é:

$$E_{\{h=0.2\}} = \max_{0 \leq k \leq n} |y(x_k) - y_k| = 1.8 \times 10^{-2}.$$

- Para $h = 0.1$, o erro global é:

$$E_{\{h=0.1\}} = \max_{1 \leq k \leq n} |y(x_k) - y_k| = 4.4 \times 10^{-3}.$$

Note que

$$\frac{E_{\{h=0.2\}}}{E_{\{h=0.1\}}} = 4.06.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje revisamos o método das diferenças finitas para resolver um problema de valor de contorno (PVC).

Considerações Finais

Na aula de hoje revisamos o método das diferenças finitas para resolver um problema de valor de contorno (PVC).

Especificamente, relembramos as fórmulas para aproximar a derivada primeira e a derivada segunda.

Considerações Finais

Na aula de hoje revisamos o método das diferenças finitas para resolver um problema de valor de contorno (PVC).

Especificamente, relembramos as fórmulas para aproximar a derivada primeira e a derivada segunda.

No caso de um PVC linear, com condição de contorno sobre v, a aproximação é obtida resolvendo um sistema linear tridiagonal (usando uma variação da E. de Gauss ou um método iterativo).

Muito grato pela atenção!