

# MS211 - Cálculo Numérico

Aula 17 – Problemas de Valor de Contorno.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle  
Matemática Aplicada  
IMECC - Unicamp



# Introdução

---

Na aula anterior, discutimos métodos numéricos para sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior, ambos com condição de valor inicial.

# Introdução

---

Na aula anterior, discutimos métodos numéricos para sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior, ambos com condição de valor inicial.

---

Em particular, um problema de valor inicial

$$v'' = f(x, v, v'), \quad v(x_0) = \gamma_1 \quad \text{e} \quad v'(x_0) = \gamma_2,$$

pode ser escrito como o sistema

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, & y_1(x_0) &= \gamma_1, \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2), & y_2(x_0) &= \gamma_2, \end{cases}$$

e resolvido usando um método de Runge-Kutta, por exemplo.

# Introdução

---

Na aula anterior, discutimos métodos numéricos para sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior, ambos com condição de valor inicial.

---

Em particular, um problema de valor inicial

$$v'' = f(x, v, v'), \quad v(x_0) = \gamma_1 \quad \text{e} \quad v'(x_0) = \gamma_2,$$

pode ser escrito como o sistema

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, & y_1(x_0) &= \gamma_1, \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2), & y_2(x_0) &= \gamma_2, \end{cases}$$

e resolvido usando um método de Runge-Kutta, por exemplo.

---

Muitos problemas, porém, são descritos por uma equação diferencial de segunda ordem com condições em mais de um ponto. Estes são os chamados problemas de valor de contorno.

# Problema de Valor de Contorno

---

A forma mais geral de um problema de valor de contorno (PVC) é

$$\begin{cases} v''(x) = f(x, v(x), v'(x)), \\ \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

em que  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  são constantes reais conhecidas tais que  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  não se anulam simultaneamente, para  $i = 1, 2$ .

# Problema de Valor de Contorno

---

A forma mais geral de um problema de valor de contorno (PVC) é

$$\begin{cases} v''(x) = f(x, v(x), v'(x)), \\ \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

em que  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  são constantes reais conhecidas tais que  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  não se anulam simultaneamente, para  $i = 1, 2$ .

---

Assumimos que  $x$  pertence ao intervalo  $[a, b]$ .

# Problema de Valor de Contorno

---

A forma mais geral de um problema de valor de contorno (PVC) é

$$\begin{cases} v''(x) = f(x, v(x), v'(x)), \\ \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

em que  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  são constantes reais conhecidas tais que  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  não se anulam simultaneamente, para  $i = 1, 2$ .

---

Assumimos que  $x$  pertence ao intervalo  $[a, b]$ .

---

Assumiremos que um PVC possui uma única solução com derivadas contínuas.

# Problema de Valor de Contorno

---

A forma mais geral de um problema de valor de contorno (PVC) é

$$\begin{cases} v''(x) = f(x, v(x), v'(x)), \\ \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

em que  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  são constantes reais conhecidas tais que  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  não se anulam simultaneamente, para  $i = 1, 2$ .

---

Assumimos que  $x$  pertence ao intervalo  $[a, b]$ .

---

Assumiremos que um PVC possui uma única solução com derivadas contínuas.

---

Iremos aproximar a solução do PVC usando o **método das diferenças finitas**.



# Problema de Valor de Contorno Linear

---

Um PVC é dito linear se  $f$  é linear em  $v(x)$  e  $v'(x)$ .

# Problema de Valor de Contorno Linear

---

Um PVC é dito linear se  $f$  é linear em  $v(x)$  e  $v'(x)$ .

---

A forma mais geral de um PVC linear é

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são funções de  $x$ .

# Problema de Valor de Contorno Linear

---

Um PVC é dito linear se  $f$  é linear em  $v(x)$  e  $v'(x)$ .

---

A forma mais geral de um PVC linear é

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são funções de  $x$ .

---

Nesse curso, discutiremos apenas PVCs lineares, que são relativamente mais fáceis.

# Discretização do PVC

---

Primeiramente, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n + 1$  subintervalos de tamanho  $h$ , ou seja, definimos

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, n + 1, \quad \text{com} \quad h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

# Discretização do PVC

---

Primeiramente, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n + 1$  subintervalos de tamanho  $h$ , ou seja, definimos

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, n + 1, \quad \text{com} \quad h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

---

Os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , chamados **malha**, representam uma discretização do intervalo  $[a, b]$ .

# Discretização do PVC

---

Primeiramente, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n + 1$  subintervalos de tamanho  $h$ , ou seja, definimos

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, n + 1, \quad \text{com} \quad h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

---

Os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , chamados **malha**, representam uma discretização do intervalo  $[a, b]$ .

---

Note que  $x_0 = a$  e  $x_{n+1} = b$  são os **pontos de contorno**.

# Discretização do PVC

---

Primeiramente, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n + 1$  subintervalos de tamanho  $h$ , ou seja, definimos

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, n + 1, \quad \text{com} \quad h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

---

Os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , chamados **malha**, representam uma discretização do intervalo  $[a, b]$ .

---

Note que  $x_0 = a$  e  $x_{n+1} = b$  são os **pontos de contorno**.

---

Os pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  estão no **interior da malha**.

# Aproximação para $v'$

---

## Diferença Centrada:

A derivada de  $v$  num ponto  $x_k$  no interior da malha pode ser aproximada por:

$$v'(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - v(x_k - h)}{2h}.$$

A diferença centrada possui erro local  $\mathcal{O}(h^2)$ .



# Aproximação para $v'$

## Diferença Centrada:

A derivada de  $v$  num ponto  $x_k$  no interior da malha pode ser aproximada por:

$$v'(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - v(x_k - h)}{2h}.$$

A diferença centrada possui erro local  $\mathcal{O}(h^2)$ .

A derivada de  $v$  em  $x_k$  também pode ser aproximada por:

- **Diferença Avançada:**  $v'(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - v(x_k)}{h}$ .
- **Diferença Atrasada:**  $v'(x_k) \approx \frac{v(x_k) - v(x_k - h)}{h}$ .

As diferenças avançada e atrasada possuem erro local  $\mathcal{O}(h)$ .

# Erro da Aproximação pela Diferença Centrada

---

Pela série de Taylor, temos que

$$v(x_k + h) = v(x_k) + hv'(x_k) + \frac{1}{2}v''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}v'''(\mu_k)h^3,$$

e

$$v(x_k - h) = v(x_k) - hv'(x_k) + \frac{1}{2}v''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}v'''(\nu_k)h^3,$$

em que  $\mu_k \in (x_k, x_k + h)$  e  $\nu_k \in (x_k - h, x_k)$ .

# Erro da Aproximação pela Diferença Centrada

---

Pela série de Taylor, temos que

$$v(x_k + h) = v(x_k) + hv'(x_k) + \frac{1}{2}v''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}v'''(\mu_k)h^3,$$

e

$$v(x_k - h) = v(x_k) - hv'(x_k) + \frac{1}{2}v''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}v'''(\nu_k)h^3,$$

em que  $\mu_k \in (x_k, x_k + h)$  e  $\nu_k \in (x_k - h, x_k)$ .

---

Subtraindo a segunda equação da primeira, encontramos

$$v(x_k + h) - v(x_k - h) = 2v'(x_k)h + \frac{1}{6}\left(v'''(\mu_k) + v'''(\nu_k)\right)h^3.$$

Logo, o erro local ao usar a diferença centrada é

$$\begin{aligned} E &= \left| v'(x_k) - \frac{v(x_k + h) - v(x_k - h)}{2h} \right| \\ &= \left| \frac{1}{12} \left( v'''(\mu_k) + v'''(\nu_k) \right) h^2 \right| \leq \frac{M}{6} h^2, \end{aligned}$$

em que  $M > 0$  é tal que  $|v'''(x)| \leq M$  para todo  $a \leq x \leq b$ .

Logo, o erro local ao usar a diferença centrada é

$$\begin{aligned} E &= \left| v'(x_k) - \frac{v(x_k + h) - v(x_k - h)}{2h} \right| \\ &= \left| \frac{1}{12} \left( v'''(\mu_k) + v'''(\nu_k) \right) h^2 \right| \leq \frac{M}{6} h^2, \end{aligned}$$

em que  $M > 0$  é tal que  $|v'''(x)| \leq M$  para todo  $a \leq x \leq b$ .

---

Concluindo, o erro local da diferença centrada é  $\mathcal{O}(h^2)$ .

## Aproximação para $v''$

---

### Aproximação para a Segunda Derivada:

A segunda derivada de  $v$  num ponto  $x_k$  no interior da malha pode ser aproximada por:

$$v''(x_k) \approx \frac{v(x_k - h) - 2v(x_k) + v(x_k + h)}{h^2}.$$

O erro local da aproximação para a segunda derivada é  $\mathcal{O}(h^2)$ .

# Erro da Aproximação para a Segunda Derivada

---

Seja  $x_k$  um ponto no interior da malha.

# Erro da Aproximação para a Segunda Derivada

---

Seja  $x_k$  um ponto no interior da malha.

---

Sabemos, pela série de Taylor, que

$$v(x_k + h) = v(x_k) + v'(x_k)h + v''(x_k)\frac{h^2}{2} + v'''(x_k)\frac{h^3}{6} + v^{(iv)}(\mu_k)\frac{h^4}{4!}$$

e

$$v(x_k - h) = v(x_k) - v'(x_k)h + v''(x_k)\frac{h^2}{2} - v'''(x_k)\frac{h^3}{6} + v^{(iv)}(\nu_k)\frac{h^4}{4!}$$

em que  $\mu_k \in (x_k, x_k + h)$  e  $\nu_k \in (x_k - h, x_k)$ .



# Erro da Aproximação para a Segunda Derivada

---

Seja  $x_k$  um ponto no interior da malha.

---

Sabemos, pela série de Taylor, que

$$v(x_k + h) = v(x_k) + v'(x_k)h + v''(x_k)\frac{h^2}{2} + v'''(x_k)\frac{h^3}{6} + v^{(iv)}(\mu_k)\frac{h^4}{4!}$$

e

$$v(x_k - h) = v(x_k) - v'(x_k)h + v''(x_k)\frac{h^2}{2} - v'''(x_k)\frac{h^3}{6} + v^{(iv)}(\nu_k)\frac{h^4}{4!}$$

em que  $\mu_k \in (x_k, x_k + h)$  e  $\nu_k \in (x_k - h, x_k)$ .

---

Somando as duas equações, encontramos

$$v(x_k + h) + v(x_k - h) = 2v(x_k) + v''(x_k)h^2 + \left( v^{(iv)}(\mu_k) + v^{(iv)}(\nu_k) \right) \frac{h^4}{4!}.$$

Logo, o erro local dessa aproximação para a segunda derivada de  $v$  em  $x_k$  é

$$\begin{aligned} E &= \left| v''(x_k) - \frac{v(x_k + h) - 2v(x_k) + v(x_k - h)}{h^2} \right| \\ &= \left| \left( v^{(iv)}(\mu_k) + v^{(iv)}(\nu_k) \right) \frac{h^2}{4!} \right| \leq \frac{M}{12} h^2, \end{aligned}$$

em que  $M > 0$  é tal que  $|v^{(iv)}(x)| \leq M$  para todo  $a \leq x \leq b$ .

# Aproximação de um PVC Linear

---

Vamos iniciar considerando o PVC linear:

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ v(a) = \gamma_1, \\ v(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

que é obtido considerando  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  e  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

## Aproximação de um PVC Linear

---

Vamos iniciar considerando o PVC linear:

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ v(a) = \gamma_1, \\ v(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

que é obtido considerando  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  e  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

---

Substituindo  $v'$  pela diferença centrada e usando a aproximação da página anterior para  $v''$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left( v(x_{k+1}) - 2v(x_k) + v(x_{k-1})) \right) \\ &= \frac{1}{2h} A(x_k) (v(x_k + h) - v(x_k - h)) + B(x_k)v(x_k) + C(x_k), \end{aligned}$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Escrevendo  $v_k = v(x_k)$ ,  $A_k = A(x_k)$ ,  $B_k = B(x_k)$  e  $C_k = C(x_k)$ , encontramos

$$\frac{1}{h^2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) = \frac{A_k}{2h}(v_{k+1} - v_{k-1}) + B_k v_k + C_k,$$

Escrevendo  $v_k = v(x_k)$ ,  $A_k = A(x_k)$ ,  $B_k = B(x_k)$  e  $C_k = C(x_k)$ , encontramos

$$\frac{1}{h^2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) = \frac{A_k}{2h}(v_{k+1} - v_{k-1}) + B_k v_k + C_k,$$

---

Multiplicando por  $h^2$  e agrupando os termos com  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$  no lado esquerdo da equação, encontramos

$$r_k v_{k-1} + p_k v_k + q_k v_{k+1} = -h^2 C_k, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

em que

$$p_k = 2 + B_k h^2, \quad q_k = -1 + \frac{A_k h}{2} \quad \text{e} \quad r_k = -1 - \frac{A_k h}{2}.$$

Escrevendo  $v_k = v(x_k)$ ,  $A_k = A(x_k)$ ,  $B_k = B(x_k)$  e  $C_k = C(x_k)$ , encontramos

$$\frac{1}{h^2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) = \frac{A_k}{2h} (v_{k+1} - v_{k-1}) + B_k v_k + C_k,$$

---

Multiplicando por  $h^2$  e agrupando os termos com  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$  no lado esquerdo da equação, encontramos

$$r_k v_{k-1} + p_k v_k + q_k v_{k+1} = -h^2 C_k, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

em que

$$p_k = 2 + B_k h^2, \quad q_k = -1 + \frac{A_k h}{2} \quad \text{e} \quad r_k = -1 - \frac{A_k h}{2}.$$

---

Além disso, as condições de contorno fornecem

$$v_0 = \gamma_1 \quad \text{e} \quad v_{n+1} = \gamma_2.$$

As equações acima podem ser escritas como o seguinte sistema linear tridiagonal

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & & & \\ r_2 & p_2 & q_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r_{n-1} & p_{n-1} & q_{n-1} \\ & & & r_n & p_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -r_1\gamma_1 - h^2 C_1 \\ -h^2 C_2 \\ \vdots \\ -h^2 C_{n-1} \\ -q_n\gamma_2 - h^2 C_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} .$$



As equações acima podem ser escritas como o seguinte sistema linear tridiagonal

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & & & & \\ r_2 & p_2 & q_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & r_{n-1} & p_{n-1} & q_{n-1} & \\ & & & r_n & p_n & \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -r_1\gamma_1 - h^2 C_1 \\ -h^2 C_2 \\ \vdots \\ -h^2 C_{n-1} \\ -q_n\gamma_2 - h^2 C_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Concluindo, uma aproximação para a solução de um PVC

$$\begin{cases} v''(x) = A(x)v'(x) + B(x)v(x) + C(x), \\ v(a) = \gamma_1, \\ v(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

nos pontos  $x_1, \dots, x_n$  do interior da malha, pode ser obtida resolvendo um sistema linear  $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ , em que a matriz  $\mathbf{A}$  é tridiagonal.

## Example 1

Use o método das diferenças finitas para obter uma aproximação do PVC linear

$$\begin{cases} v''(x) + 2v'(x) + v(x) = x, \\ v(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(1) = -1, \end{cases}$$

para  $0 \leq x \leq 1$ , considerando  $h = 0.1$  e  $h = 0.05$ .

Compare os resultados obtidos com a solução exata

$$v(x) = 2e^{-x}(1 - x) + x - 2.$$

**Resolução:** A solução do PVC é obtida resolvendo o sistema linear tridiagonal  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ , em que

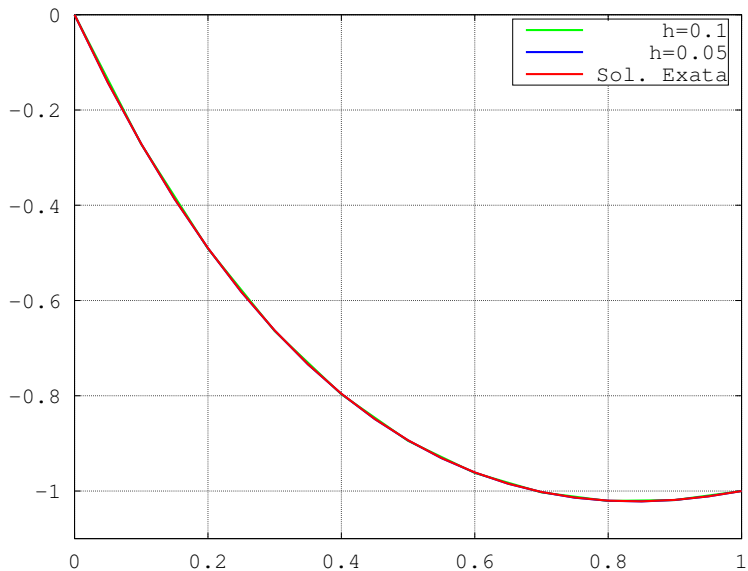
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 - h^2 & -1 - h & & & & \\ -1 + h & 2 - h^2 & -1 - h & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 + h & 2 - h^2 & -1 - h & \\ & & & -1 + h & 2 - h^2 \end{bmatrix}$$

e

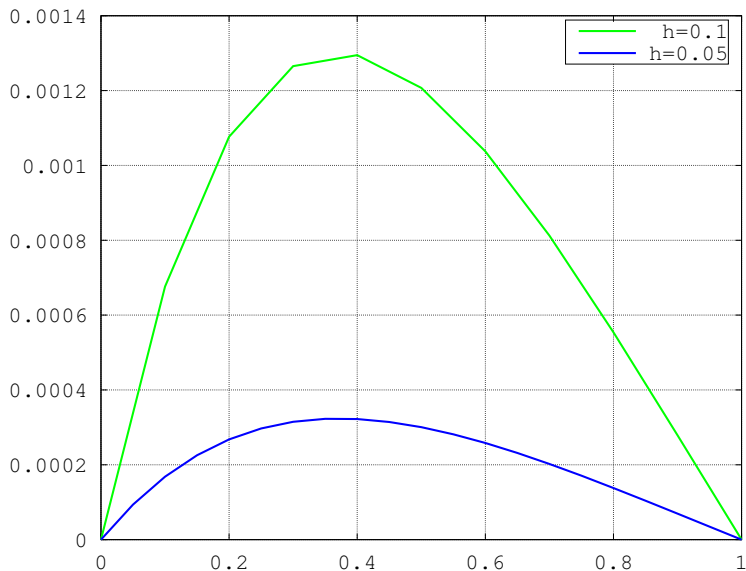
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -h^3 \\ -2h^3 \\ \vdots \\ -(n-1)h^3 \\ -1 - h - nh^3 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema encontramos o seguintes gráficos:

## Gráfico da solução (aproximada e exata):



## Gráfico do erro global (aproximação $\times$ solução exata):



Especificamente, temos os erros globais:

- Para  $h = 0.1$ , o erro global é:

$$E_{\{h=0.1\}} = \max_{1 \leq k \leq n} |v(x_k) - v_k| = 1.2946 \times 10^{-3}.$$

- Para  $h = 0.05$ , o erro global é:

$$E_{\{h=0.05\}} = \max_{1 \leq k \leq n} |v(x_k) - v_k| = 3.2278 \times 10^{-4}.$$

Lembre-se que o método considerado utiliza apenas diferenças divididas  $\mathcal{O}(h^2)$ . Logo, dividindo  $h$  por 2, espera-se que o erro seja reduzido por  $1/4$ . Com efeito,

$$\frac{E_{\{h=0.1\}}}{E_{\{h=0.05\}}} = 4.0107.$$

# Considerações Finais

---

Na aula de hoje apresentamos o método das diferenças finitas para resolver um problema de valor de contorno (PVC).

## Considerações Finais

---

Na aula de hoje apresentamos o método das diferenças finitas para resolver um problema de valor de contorno (PVC).

---

Especificamente, apresentamos as fórmulas para aproximar primeira e segunda derivadas, bem como a ordem do erro das aproximações.



## Considerações Finais

---

Na aula de hoje apresentamos o método das diferenças finitas para resolver um problema de valor de contorno (PVC).

---

Especificamente, apresentamos as fórmulas para aproximar primeira e segunda derivadas, bem como a ordem do erro das aproximações.

---

O erro global da aproximação para a solução do PVC é da ordem do erro das diferenças divididas.

## Considerações Finais

---

Na aula de hoje apresentamos o método das diferenças finitas para resolver um problema de valor de contorno (PVC).

---

Especificamente, apresentamos as fórmulas para aproximar primeira e segunda derivadas, bem como a ordem do erro das aproximações.

---

O erro global da aproximação para a solução do PVC é da ordem do erro das diferenças divididas.

---

No caso de um PVC linear, com condição de contorno sobre  $v$ , a aproximação é obtida resolvendo um sistema linear tridiagonal (usando uma variação da E. de Gauss ou um método iterativo).

Muito grato pela atenção!