MS211 - Cálculo Numérico

Aula 16 – Métodos Numéricos para Sistemas de Equações Diferenciais.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Na aula anterior, apresentamos os métodos de Runge-Kutta para resolução de um PVI da forma:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Na aula anterior, apresentamos os métodos de Runge-Kutta para resolução de um PVI da forma:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Em termos gerais, um método de Runge-Kutta define

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k), \forall k = 0, 1, \dots,$$

em que ϕ é uma função de t e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h.

Na aula anterior, apresentamos os métodos de Runge-Kutta para resolução de um PVI da forma:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Em termos gerais, um método de Runge-Kutta define

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k), \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que ϕ é uma função de t e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h.

Na aula de hoje, veremos como os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicados também para a resolução numérica de sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior, ambos com valores iniciais.

Sistemas de Equações Diferenciais

Um sistema de equações diferenciais com valor inicial

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_1(t_0) &= y_{1,0}, \\ y_2(t_0) &= y_{2,0}, \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= y_{n,0}, \end{aligned}$$

pode ser escrito de forma mais compacta como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

em que $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ e $\mathbf{y}_0$ são vetores em $\mathbb{R}^n$ escritos como

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1(t, \mathbf{y}) \\ f_2(t, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{bmatrix}.$$

Métodos de Euler

O método de Euler para sistemas de equações diferenciais é

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k), \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$ são aproximações para $\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \ldots$.

Exemplo 1

Use o método de Euler para obter uma aproximação numérica da solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y' &= z, \\ z' &= y + e^t \end{cases} \qquad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

para $t \in [0, 0.2]$ usando $h = 0.1$.

Resolução: A fórmula do método de Euler fornece

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_k \\ y_k + e^{t_k} \end{bmatrix}.$$

Para $k = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_0 \\ y_0 + e^{t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 + e^{t_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 + e^{0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 0.4105 \end{bmatrix}.$$

Portanto, encontramos as aproximações

$$y(0.2) \approx 1.02 \quad \text{e} \quad z(0.2) \approx 0.4105.$$

Método de Heun ou Método de Euler Aperfeiçoado

De um modo similar, o método de Heun para sistemas de equações diferenciais com valor inicial é

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{y}_k + h\mathbf{k}_1).$$

Exemplo 2

Use o método de Heun para obter uma aproximação numérica da solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y' &= z, \\ z' &= y + e^t \end{cases} \qquad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

para $t \in [0, 0.2]$ usando $h = 0.1$.

Resolução: Para $k = 0$, o método de Heun fornece:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(t_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_0 \\ y_0 + e^{t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(t_0 + h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + h\mathbf{k}_1\right) = \mathbf{f}\left(0 + h, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathbf{f}\left(0.1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 + e^{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 2.1052 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0.1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 2.1052 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para $k = 1$, o método de Heun fornece:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(t_1, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 + e^{t_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 1.01 + e^{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(t_1 + h, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + h\mathbf{k}_1\right) \\
&= \mathbf{f}\left(0.1 + h, \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathbf{f}\left(0.2, \begin{bmatrix} 1.03053 \\ 0.41678 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 1.03053 + e^{0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 2.2519 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \frac{h}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \\
&= \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} + \frac{0.1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 2.2519 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.04110 \\ 0.42362 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Método de Runge-Kutta de Ordem 4

Finalmente, o método de Runge-Kutta de ordens 4 para sistemas de equações diferenciais é descrito por:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right),$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k), \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_k + h/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_1 h/2), \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(t_k + h/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_2 h/2), \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_3 h).
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Use o método de Runge-Kutta de ordem 4 para obter uma aproximação numérica de

$$\begin{cases} y' &= z, \\ z' &= y + e^t \end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{matrix}$$

para $t \in [0, 0.2]$ usando $h = 0.1$.

Resolução: Para $k = 0$, temos

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(t_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_1 \frac{h}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0.1000 \\ 2.0513 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_2 \frac{h}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0.1026 \\ 2.0563 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(t_0 + h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_3 h\right) = \begin{bmatrix} 0.2056 \\ 2.1154 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = \begin{bmatrix} 1.0102 \\ 0.2055 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1$, temos

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(t_1, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.2055 \\ 2.1154 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_1 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_1 \frac{h}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0.3113 \\ 2.1823 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_1 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_2 \frac{h}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0.3146 \\ 2.1876 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(t_1 + h, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_3 h\right) = \begin{bmatrix} 0.4243 \\ 2.2630 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = \begin{bmatrix} 1.0415 \\ 0.4241 \end{bmatrix}.$$

Modelo Presa-Predador

Considere duas espécies que interagem como presa-predador. Por exemplo, lobos e coelhos.

Modelo Presa-Predador

Considere duas espécies que interagem como presa-predador. Por exemplo, lobos e coelhos.

Denote por $p(t)$ e $q(t)$ a quantidade (e.g. densidade populacional) de presas e predadores no instante t.

Modelo Presa-Predador

Considere duas espécies que interagem como presa-predador. Por exemplo, lobos e coelhos.

Denote por $p(t)$ e $q(t)$ a quantidade (e.g. densidade populacional) de presas e predadores no instante t.

A dinâmica populacional das duas espécies pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais, chamado equações de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} p' = ap - bpq, \\ q' = -cq + dpq, \end{cases}$$

em que a, b, c e d são constantes positivas.

Considere

$$a = 0.25, \quad b = 0.01, \quad c = 1.00 \quad \text{e} \quad d = 0.01,$$

e a condição inicial

$$p_0 = 80 \quad \text{e} \quad q_0 = 30.$$

Considere

$$a = 0.25, \quad b = 0.01, \quad c = 1.00 \quad \text{e} \quad d = 0.01,$$

e a condição inicial

$$p_0 = 80 \quad \text{e} \quad q_0 = 30.$$

Equivalentemente, temos

$$\begin{cases} p' = 0.25p - 0.01pq, \\ q' = -1.00q + 0.01pq, \end{cases} \qquad \begin{aligned} p(t_0) &= 80, \\ q(t_0) &= 30. \end{aligned}$$

Considere

$$a = 0.25, \quad b = 0.01, \quad c = 1.00 \quad \text{e} \quad d = 0.01,$$

e a condição inicial

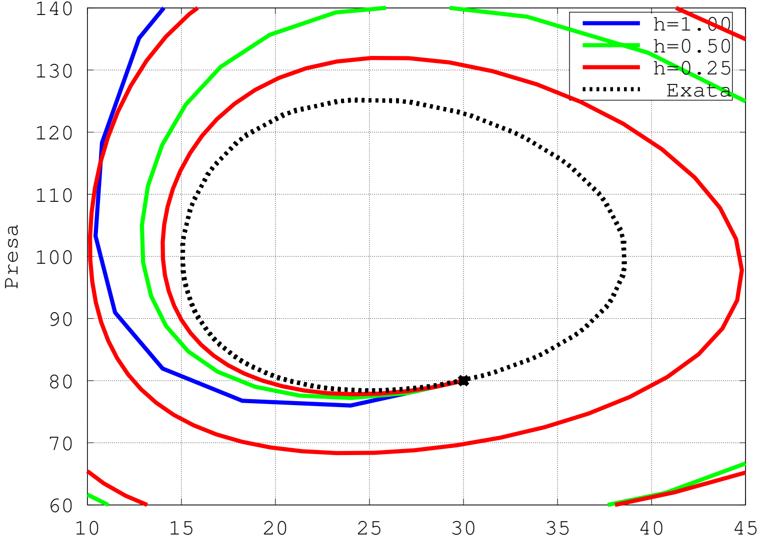
$$p_0 = 80 \quad \text{e} \quad q_0 = 30.$$

Equivalentemente, temos

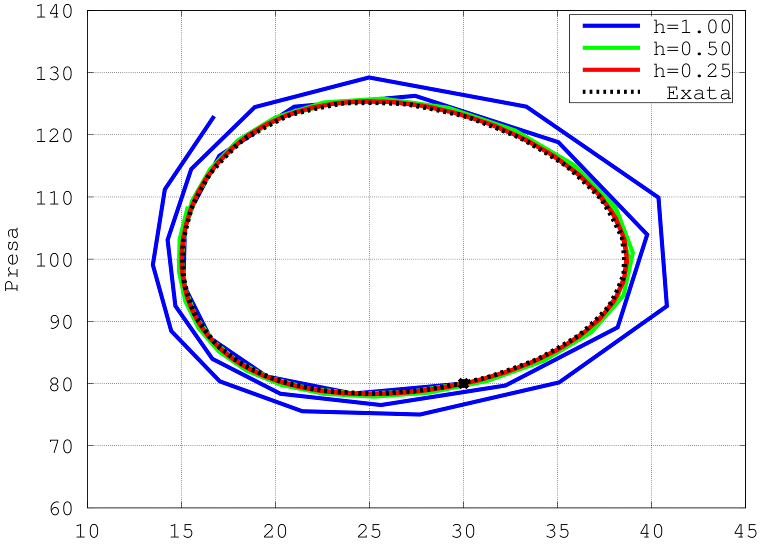
$$\begin{cases} p' = 0.25p - 0.01pq, \\ q' = -1.00q + 0.01pq, \end{cases} \qquad \begin{aligned} p(t_0) &= 80, \\ q(t_0) &= 30. \end{aligned}$$

Nesse caso, encontramos as seguintes aproximações usando os métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de ordem 4.

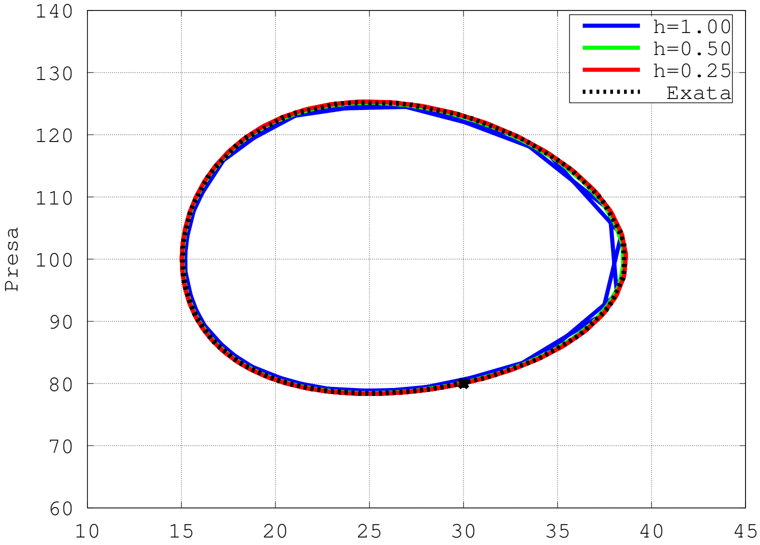
Método de Euler



Método de Heun



Método de Runge-Kutta ordem 4



Equações Diferenciais de Ordem Superior

Uma equação diferencial de ordem m

$$u^{(m)} = g(t, u, u', u'', \ldots, u^{(m-1)}),$$

pode ser escrita como um sistema com m equações diferenciais de primeira ordem

$$\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y}),$$

tomando

$$y_1(t) = u(t), \quad y_2(t) = u'(t), \quad \ldots, \quad y_m(t) = u^{(m-1)}.$$

Especificamente, temos

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ & \vdots \\ y_m' &= g(t, y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{cases}$$

Exemplo 4

Escreva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' - u = e^t, \\ u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais com valor de inicial.

Exemplo 4

Escreva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' - u = e^t, \\ u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais com valor de inicial.

Resposta: Tomando $y = u$ e $z = u'$, podemos escrever o problema de valor inicial como

$$\begin{cases} y' &= z, & y(0) &= 1 \\ z' &= y + e^t, & z(0) &= 0, \end{cases}$$

que é o sistema discutido em exemplos da aula anterior.

Movimento de Dois Corpos

O problema de dois corpos sob atração gravitacional mutual é um problema importante da mecânica clássica. Formalmente, considere um corpo de massa m orbitando um corpo maior de massa M, tal como a terra e o sol, respectivamente. Pela lei do movimento de Newton, a trajetória $\big(x(t), y(t)\big)$ do corpo menor é descrita pelo sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$x'' = -GM\frac{x}{r^3} \quad \text{e} \quad y'' = -GM\frac{y}{r^3},$$

em que G é a constante gravitacional e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância entre os centros de massa dos dois corpos. Admitindo unidades tais que $GM = 1$ e considerando as condições iniciais

$$x(0) = 1 - e, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

em que e denota a ecentricidade da órbita elíptica.

Exemplo 5

Usando métodos de Runge-Kutta de ordem 1, 2 e 4, encontre aproximações para a órbita do corpo menor considerando $e = 0$, $e = 0.5$ e $e = 0.9$.

Exemplo 5

Usando métodos de Runge-Kutta de ordem 1, 2 e 4, encontre aproximações para a órbita do corpo menor considerando $e = 0$, $e = 0.5$ e $e = 0.9$.

Resposta: Primeiro, devemos escrever o sistema de equações de segunda ordem como um sistema de primeira ordem. Tomando

$$y_1 = t, \quad y_2 = x', \quad y_3 = y \quad \text{e} \quad y_4 = y',$$

obtemos o sistema

$$y_1' = y_2, \tag{1}$$

$$y_2' = -y_1/(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}, \tag{2}$$

$$y_3' = y_4, \tag{3}$$

$$y_4' = -y_3/(y_1^2 + y_3^2)^{3/2}. \tag{4}$$

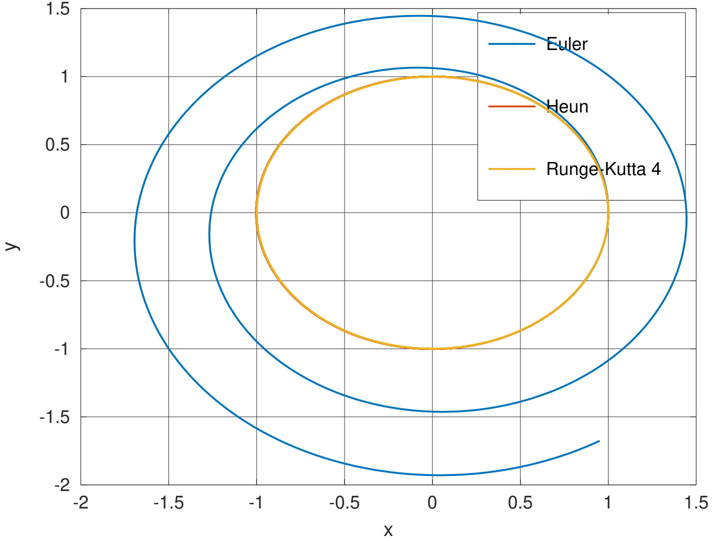
Equivalentemente, temos:

$$\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y}) \quad \text{em que} \quad f(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1/(y_1^2 + y_3^2)^{3/2} \\ y_4 \\ -y_3/(y_1^2 + y_3^2)^{3/2} \end{bmatrix}.$$

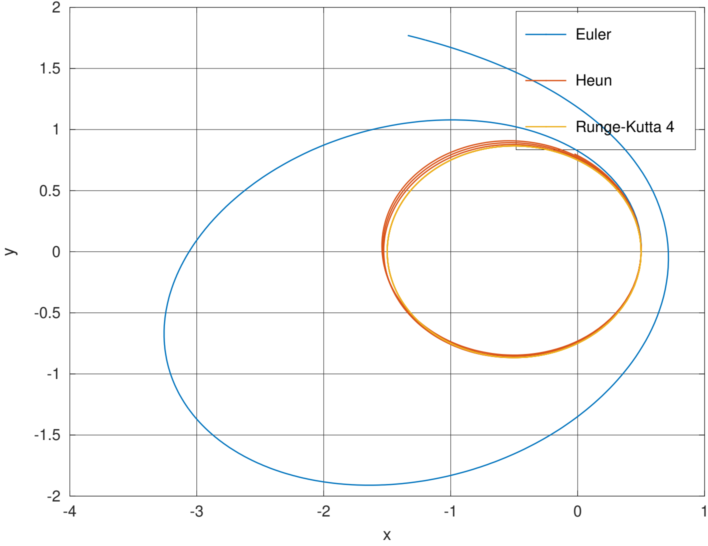
Finalmente, as condições iniciais são dadas pela equação:

$$\mathbf{y}_0 = \left[1 - e, 0, 0, \sqrt{\tfrac{1+e}{1-e}}\right]^T.$$

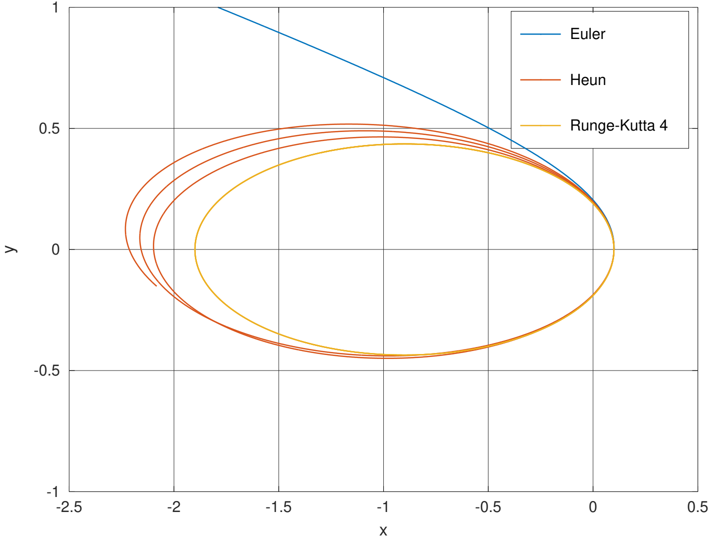
Considerando $e = 0$, o intervalo $[0, 20]$ e $h = 0.04$ encontramos as seguintes aproximações para a órbita:



Considerando $e = 0.5$, o intervalo $[0, 20]$ e $h = 0.04$ encontramos as seguintes aproximações para a órbita:



Considerando $e = 0.9$, o intervalo $[0, 20]$ e $h = 0.004$ encontramos as seguintes aproximações para a órbita:



Considerações Finais

Na aula de hoje, vimos que os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicados para aproximar a solução de um sistema de equações diferenciais.

Considerações Finais

Na aula de hoje, vimos que os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicados para aproximar a solução de um sistema de equações diferenciais.

Vimos também como escrever uma equação diferencial de ordem superior como um sistema de equações diferenciais.

Considerações Finais

Na aula de hoje, vimos que os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicados para aproximar a solução de um sistema de equações diferenciais.

Vimos também como escrever uma equação diferencial de ordem superior como um sistema de equações diferenciais.

Durante toda abordagem, consideramos h fixo. Porém, a maioria dos softwares de computação científica usam métodos de passo variado. Os métodos de passo variado fazem uma estimativa do erro local a cada iteração. O método de Runge-Kutta-Fehlberg é um exemplo de método de passo variado.

Muito grato pela atenção!