MS211 - Cálculo Numérico

Aula 15 – Métodos de Runge-Kutta.

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos de série de Taylor para um problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos de série de Taylor para um problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

De um modo geral, um método numérico determina uma aproximação y_k para $y(t_k)$, em que $t_k = t_0 + kh$, para $k = 1, 2, \ldots$.

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos de série de Taylor para um problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

De um modo geral, um método numérico determina uma aproximação y_k para $y(t_k)$, em que $t_k = t_0 + kh$, para $k = 1, 2, \ldots$.

Um método numérico é dito de ordem p se o erro local, obtido assumindo $y_k = y(t_k)$, satisfaz

$$e(t_{k+1}) = |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| < Ch^{p+1},$$

em que $C > 0$ é uma constante que pode depender das derivadas da solução y do PVI.

Método de Série de Taylor de Ordem 1 e 2

O método de Euler que é um método de série de Taylor de ordem 1, define:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Método de Série de Taylor de Ordem 1 e 2

O método de Euler que é um método de série de Taylor de ordem 1, define:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Similarmente, um método de série de Taylor de ordem 2 define:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\big(f_t(t_k, y_k) + f_y(t_k, y_k)f(t_k, y_k)\big).$$

Aqui, y_k é uma aproximação para $y(t_k)$, com $t_k = t_0 + kh$.

Método de Série de Taylor de Ordem 1 e 2

O método de Euler que é um método de série de Taylor de ordem 1, define:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Similarmente, um método de série de Taylor de ordem 2 define:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\big(f_t(t_k, y_k) + f_y(t_k, y_k)f(t_k, y_k)\big).$$

Aqui, y_k é uma aproximação para $y(t_k)$, com $t_k = t_0 + kh$.

Obtemos erro local menores considerando métodos de série de Taylor de ordem maior. Contudo, temos que calcular derivadas parciais de f!

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são métodos de passo simples, ou seja, y_{k+1} é determinado usando apenas de t_k e y_k.

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são métodos de passo simples, ou seja, y_{k+1} é determinado usando apenas de t_k e y_k.

Um método de Runge-Kutta de ordem p não requer o cálculo de qualquer derivada de f, mas depende de outra função ϕ que é definida avaliando f em diferentes pontos.

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são métodos de passo simples, ou seja, y_{k+1} é determinado usando apenas de t_k e y_k.

Um método de Runge-Kutta de ordem p não requer o cálculo de qualquer derivada de f, mas depende de outra função ϕ que é definida avaliando f em diferentes pontos.

Especificamente, os métodos de Runge-Kutta são dados por:

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k), \forall k = 0, 1, \dots,$$

em que ϕ é uma função de x e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h.

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são métodos de passo simples, ou seja, y_{k+1} é determinado usando apenas de t_k e y_k.

Um método de Runge-Kutta de ordem p não requer o cálculo de qualquer derivada de f, mas depende de outra função ϕ que é definida avaliando f em diferentes pontos.

Especificamente, os métodos de Runge-Kutta são dados por:

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k), \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que ϕ é uma função de x e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h.

O método de Euler, obtido considerando $\phi = f$, é um método de Runge-Kutta de ordem $p = 1$.

Método de Heun ou Método de Euler Aperfeiçoado

O **método de Heun**, também conhecido por **método de Euler aperfeiçoado**, é um método de Runge-Kutta de ordem 2.

Método de Heun ou Método de Euler Aperfeiçoado

O **método de Heun**, também conhecido por **método de Euler aperfeiçoado**, é um método de Runge-Kutta de ordem 2.

No método de Heun, definimos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que

$$k_1 = f(t_k, y_k) \quad \text{e} \quad k_2 = f(t_k + h, y_k + hk_1).$$

ou, equivalentemente,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k))\Big], \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

Método de Heun ou Método de Euler Aperfeiçoado

O **método de Heun**, também conhecido por **método de Euler aperfeiçoado**, é um método de Runge-Kutta de ordem 2.

No método de Heun, definimos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

em que

$$k_1 = f(t_k, y_k) \quad \text{e} \quad k_2 = f(t_k + h, y_k + hk_1).$$

ou, equivalentemente,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k)\Big], \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

Observe que esse é um método de Runge-Kutta com

$$\phi(t, y) = \frac{1}{2}\left(f(t, y) + f\big(t + h, y + hf(t, y)\big)\right).$$

Método de Runge-Kutta de Ordem 4

O método de Runge-Kutta de ordem 4 é dado por:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

em que

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_k, y_k\right), \\
k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1\frac{h}{2}\right), \\
k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + k_2\frac{h}{2}\right), \\
k_4 &= f\left(t_k + h, y_k + hk_3\right).
\end{aligned}$$

Exemplo 1

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da Heun e o método de Runge-Kutta de ordem 4 para estimar $y(0.04)$ com $h = 0.04$. Compare com a solução analítica $y(0.04) = e^{0.04}$.

Exemplo 1

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da Heun e o método de Runge-Kutta de ordem 4 para estimar $y(0.04)$ com $h = 0.04$. Compare com a solução analítica $y(0.04) = e^{0.04}$.

Resposta: Pelo método de Heun, teremos

$$y_1 = y_0 \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) = 1.0408.$$

Observe que essa é a solução encontrada pelo método de série de Taylor de ordem 2 na aula anterior.
O erro obtido é

$$|e^{0.04} - y_1| = 1.0774 \times 10^{-5}.$$

No método de Runge-Kutta de ordem 4 temos

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = y_0, \\
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_1 \frac{h}{2}\right) = y_0\left(1 + \frac{h}{2}\right), \\
k_3 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_k + k_2 \frac{h}{2}\right) = y_0\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right), \\
k_4 &= f(t_0 + h, y_0 + k_3 h) = y_0\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= y_0\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) = 1.04081077333333.
\end{aligned}
$$

O erro obtido é

$$|e^{0.04} - y_1| = 8.5906 \times 10^{-10}.$$

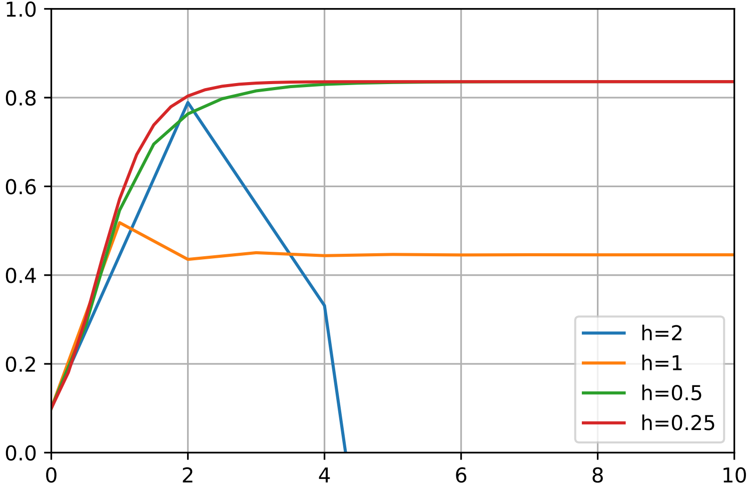
Exemplo 2

Suponha que a densidade populacional p de lagartas seja descrita pelo PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 3p\,(1-p) - \dfrac{p^2}{1+p^2}, \\ p(0) = 0.1, \end{cases}$$

Use o método de Heun e o método de Runge-Kutta de ordem 4 para estimar p para $0 \leq t \leq 10$.

Usando o método de Heun com diferentes valores de h, encontramos:



Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-1.80×10^{16}	0.44578	0.83597	0.83597

Comentários:

- Encontramos um erro significativo para $h \geq 1.0$.
- Comparando o gráfico, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
  Portanto, podemos acreditar que encontramos um bom resultado com $h = 0.5$! Contudo, precisamos fazer 20 iterações do método!

Aproximações para $p(10)$:

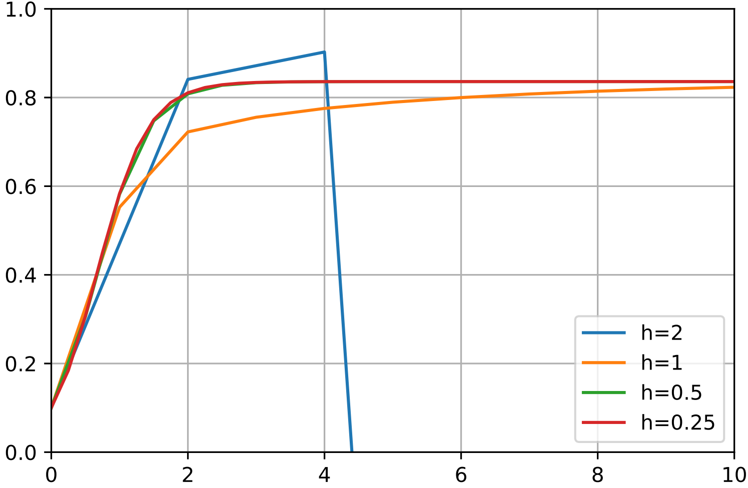
h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-1.80×10^{16}	0.44578	0.83597	0.83597

Comentários:

- Encontramos um erro significativo para $h \geq 1.0$.
- Comparando o gráfico, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
  Portanto, podemos acreditar que encontramos um bom resultado com $h = 0.5$! Contudo, precisamos fazer 20 iterações do método!

Apesar dessas observações, podemos mostrar que o método de Euler modificado é também um método de ordem 2!

O método de Runge-Kutta de ordem 4 fornece



Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-8.35×10^{284}	0.82311	0.83597	0.83597

Comentários:

- Encontramos erro significativos para $h \geq 1.0$.
- Comparando o gráfico, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
  Portanto, podemos acreditar que encontramos um bom resultado com $h = 0.5$! Nesse caso, efetuamos 20 iterações do método!

Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-8.35×10^{284}	0.82311	0.83597	0.83597

Comentários:

- Encontramos erro significativos para $h \geq 1.0$.
- Comparando o gráfico, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
  Portanto, podemos acreditar que encontramos um bom resultado com $h = 0.5$! Nesse caso, efetuamos 20 iterações do método!

Podemos mostrar que esse método de Runge-Kutta é de fato um método de ordem 4!

Ordem do método de Heun

Vamos mostrar que o método de Heun é de ordem 2. Com efeito, vamos considerar um caso mais geral em que ϕ é dada por

$$\phi(t, y) = af(t, y) + bf\big(t + ch, y + chf(t, y)\big). \tag{1}$$

Ordem do método de Heun

Vamos mostrar que o método de Heun é de ordem 2. Com efeito, vamos considerar um caso mais geral em que ϕ é dada por

$$\phi(t,y) = af(t,y) + bf\big(t + ch, y + chf(t,y)\big). \tag{1}$$

No método de Heun, temos

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c = 1.$$

Ordem do método de Heun

Vamos mostrar que o método de Heun é de ordem 2. Com efeito, vamos considerar um caso mais geral em que ϕ é dada por

$$\phi(t,y) = af(t,y) + bf\big(t+ch, y+chf(t,y)\big). \tag{1}$$

No método de Heun, temos

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c = 1.$$

Vamos encontrar a, b e c que maximizam a ordem do método de Runge-Kutta com ϕ dada por (1).
Em outras palavras, vamos encontrar o maior valor p tal que

$$|y(t_k + h) - y_{k+1}| \leq C(h^{p+1}),$$

para algum $C > 0$, supondo que $y_k = y(t_k)$.

Primeiro, expandindo $y(t_k + h)$ em série de Taylor em torno de t_k, encontramos

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + y''(t_k)\frac{h^2}{2} + y'''(\xi)\frac{h^3}{6},$$

para algum ξ entre t_k e $t_k + h$.

Primeiro, expandindo $y(t_k + h)$ em série de Taylor em torno de t_k, encontramos

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + y''(t_k)\frac{h^2}{2} + y'''(\xi)\frac{h^3}{6},$$

para algum ξ entre t_k e $t_k + h$.

Lembrando que $y(t_k) = y_k$ e $y' = f(t, y)$, temos

$$\begin{aligned} y'(t_k) &= f(t_k, y_k) = f, \\ y''(t_k) &= f_t(t_k, y_k) + f_y(t_k, y_k)f(t_k, y_k) = f_t + f_y f, \end{aligned}$$

Primeiro, expandindo $y(t_k + h)$ em série de Taylor em torno de t_k, encontramos

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + y''(t_k)\frac{h^2}{2} + y'''(\xi)\frac{h^3}{6},$$

para algum ξ entre t_k e $t_k + h$.

Lembrando que $y(t_k) = y_k$ e $y' = f(t, y)$, temos

$$\begin{aligned} y'(t_k) &= f(t_k, y_k) = f, \\ y''(t_k) &= f_t(t_k, y_k) + f_y(t_k, y_k)f(t_k, y_k) = f_t + f_y f, \end{aligned}$$

Assim, temos

$$y(t_k + h) = y_k + fh + (f_t + f_y f)\frac{h^2}{2} + C_1 h^3,$$

em que $C_1 = y'''(\xi)/6$.

Sabemos também que

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k) = y_k + h\big(af + bf(t_k + ch, y_k + chf)\big),$$

em que f, sem os argumentos, denota $f(t_k, y_k)$.

Sabemos também que

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k) = y_k + h\big(af + bf(t_k + ch, y_k + chf)\big),$$

em que f, sem os argumentos, denota $f(t_k, y_k)$.

Supondo que f é diferenciável, podemos escrever

$$f(t_k + ch, y_k + chf) = f(t_k, y_k) + f_t(t_k, y_k)ch + f_y(t_k, y_k)(chf) + C_2h^2,$$

em que C_2 depende das derivadas parciais de ordem 2 de f.

Sabemos também que

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k) = y_k + h\big(af + bf(t_k + ch, y_k + chf)\big),$$

em que f, sem os argumentos, denota $f(t_k, y_k)$.

Supondo que f é diferenciável, podemos escrever

$$f(t_k + ch, y_k + chf) = f(t_k, y_k) + f_t(t_k, y_k)ch + f_y(t_k, y_k)(chf) + C_2 h^2,$$

em que C_2 depende das derivadas parciais de ordem 2 de f.

Denotando $f_t = f_t(t_k, y_k)$ e $f_y = f_y(t_k, y_k)$, encontramos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\big(af + bf(t_k + ch, y_k + chf)\big) \\ &= y_k + afh + hb\big(f + f_t ch + f_y fch + C_2 h^2\big) \\ &= y_k + (a+b)fh + bc(f_t + f_y f)h^2 + bC_2 h^3 \end{aligned}$$

Combinando os resultados, concluímos que o erro local é

$$
\begin{aligned}
&|y(t_k + h) - y_{k+1}| \\
&= |(y_k + fh + (f_t + f_y f)\frac{h^2}{2} + C_1 h^3) \\
&\qquad - (y_k + (a+b)fh + bc(f_t + f_y f)h^2 + bC_2 h^3)| \\
&= |(1 - a - b)fh + \left(\frac{1}{2} - bc\right)(f_t + f_y f)h^2 + (C_1 - bC_2)h^3|
\end{aligned}
$$

Combinando os resultados, concluímos que o erro local é

$$
\begin{aligned}
&|y(t_k + h) - y_{k+1}| \\
&= |(y_k + fh + (f_t + f_y f)\frac{h^2}{2} + C_1 h^3) \\
&\qquad - (y_k + (a+b)fh + bc(f_t + f_y f)h^2 + bC_2 h^3)| \\
&= |(1 - a - b)fh + \left(\frac{1}{2} - bc\right)(f_t + f_y f)h^2 + (C_1 - bC_2)h^3|
\end{aligned}
$$

Portanto, se

$$a + b = 1 \quad \text{e} \quad 2bc = 1,$$

então teremos

$$|y(t_k + h) - y_{k+1}| \leq Ch^3,$$

para algum $C \geq |C_1 - bC_2|$.

No método de Heun temos

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c = 1,$$

que satisfazem as condições

$$a + b = 1 \quad \text{e} \quad 2bc = 1.$$

Logo, esse é um método de Runge e Kutta de ordem 2.

No método de Heun temos

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c = 1,$$

que satisfazem as condições

$$a + b = 1 \quad \text{e} \quad 2bc = 1.$$

Logo, esse é um método de Runge e Kutta de ordem 2.

Argumentos semelhantes podem ser usados para mostrar que o método de Runge-Kutta de ordem 4 satisfaz

$$|y(t_k + h) - y_{k+1}| \leq Ch^5,$$

para algum $C > 0$ (supondo que $y_k = y(t_k)$).

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de Runge-Kutta.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de Runge-Kutta.

Especificamente, apresentamos o método de Heun e um método de Runge-Kutta de ordem 4.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de Runge-Kutta.

Especificamente, apresentamos o método de Heun e um método de Runge-Kutta de ordem 4.

Diferente dos métodos de série de Taylor, os métodos de Runge-Kutta não requerem nenhuma derivada de f.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de Runge-Kutta.

Especificamente, apresentamos o método de Heun e um método de Runge-Kutta de ordem 4.

Diferente dos métodos de série de Taylor, os métodos de Runge-Kutta não requerem nenhuma derivada de f.

Porém, utilizam uma função auxiliar ϕ que é obtida avaliando f em diferentes pontos.

Muito grato pela atenção!