MS211 - Cálculo Numérico

Aula 14 – Solução Numérica de Problemas de Valor Inicial: Método de Euler e Métodos de Série de Taylor.

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Introdução

Nas próximas aulas estudaremos métodos numéricos para **problemas de valor inicial** (PVI) formulados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

em que f é uma função das variáveis t (variável independente) e y (variável dependente).

Introdução

Nas próximas aulas estudaremos métodos numéricos para **problemas de valor inicial** (PVI) formulados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

em que f é uma função das variáveis t (variável independente) e y (variável dependente).

A equação

$$y(t_0) = y_0,$$

com t_0 e y_0 dados, é chamada **condição inicial.**

Introdução

Nas próximas aulas estudaremos métodos numéricos para **problemas de valor inicial** (PVI) formulados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

em que f é uma função das variáveis t (variável independente) e y (variável dependente).

A equação

$$y(t_0) = y_0,$$

com t_0 e y_0 dados, é chamada **condição inicial.**

A solução de um PVI, quando existe, é uma função y que depende de t e satisfaz a condição inicial. Assumiremos que o PVI possui uma única solução!

Exemplo 1

A população p de lagartas pode ser descrita pelo PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = rp\left(1 - \dfrac{p}{k}\right) - \dfrac{p^2}{1+p^2}, \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

em que p_0 é a população inicial (no instante $t = 0$), r está relacionado à taxa de reprodução da lagarta e k à quantidade de folhas disponíveis na planta. O termo $\frac{p^2}{1+p^2}$ descreve a predação da lagarta (por pássaros, por exemplo).
Considerando $r = 3$, $k = 1$ e $p_0 = 0.1$, qual será a população de lagartas no instante $t = 10$?

Podemos determinar $p(10)$ usando um método numérico!

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(t)$ em pontos $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(t)$ em pontos $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Por simplicidade, assumiremos que os pontos são igualmente espaçados, ou seja,

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

em que h é chamado **tamanho do passo**.

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(t)$ em pontos $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Por simplicidade, assumiremos que os pontos são igualmente espaçados, ou seja,

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1.$$

em que h é chamado **tamanho do passo**.

Denotaremos por y_k a estimativa de $y(t_k)$, ou seja,

$$y_k \approx y(t_k), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(t)$ em pontos $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Por simplicidade, assumiremos que os pontos são igualmente espaçados, ou seja,

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

em que h é chamado **tamanho do passo**.

Denotaremos por y_k a estimativa de $y(t_k)$, ou seja,

$$y_k \approx y(t_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Temos um **método de passo simples**, ou *passo um*, se y_k é determinado usando apenas y_{k-1}. Caso contrário, temos um **método de passo múltiplo**.

Ideia do Método de Euler

Considere um PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Ideia do Método de Euler

Considere um PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Como conhecemos a derivada $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$, podemos aproximar y pela reta r_0 que passa por (t_0, y_0) com coeficiente angular $y'(t_0)$, ou seja, aproximamos y por

$$r_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0).$$

Ideia do Método de Euler

Considere um PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Como conhecemos a derivada $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$, podemos aproximar y pela reta r_0 que passa por (t_0, y_0) com coeficiente angular $y'(t_0)$, ou seja, aproximamos y por

$$r_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0).$$

Com essa aproximação, encontramos

$$y_1 = r_0(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - x_0) = y_0 + f(t_0, y_0)h,$$

em que $t_1 = t_0 + h$.

Método de Euler

Repetindo o raciocínio com (t_1, y_1), obtemos $y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$.

Método de Euler

Repetindo o raciocínio com (t_1, y_1), obtemos $y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$.

De um modo geral, o método de Euler fornece

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Euler

Repetindo o raciocínio com (t_1, y_1), obtemos $y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$.

De um modo geral, o método de Euler fornece

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Observe que o método de Euler é um método de passo simples.

Método de Euler

Repetindo o raciocínio com (t_1, y_1), obtemos $y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$.

De um modo geral, o método de Euler fornece

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Observe que o método de Euler é um método de passo simples.

O método de Euler é um método de série de Taylor de ordem 1.

Com efeito, se $y \equiv y(t)$ for suficientemente suave então, pela série de Taylor centrada em t_k, temos:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2,$$

em que $t_k < \xi < t_k + h$. Equivalentemente, temos

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f(t_k, y(t_k))h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2.$$

Com efeito, se $y \equiv y(t)$ for suficientemente suave então, pela série de Taylor centrada em t_k, temos:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2,$$

em que $t_k < \xi < t_k + h$. Equivalentemente, temos

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f(t_k, y(t_k))h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2.$$

Assumindo $y_k = y(t_k)$ e lembrando que $y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h$, concluímos que o erro local (de uma única iteração) do método de Euler em t_{k+1} é

$$e(t_{k+1}) = |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| = \frac{1}{2}|y''(\xi)|h^2 \leq \frac{M_2}{2}h^2,$$

em que

$$M_2 = \max_{t_k \leq \xi \leq t_{k+1}} |y''(\xi)|.$$

Exemplo 2

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método de Euler para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Exemplo 2

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método de Euler para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Resposta: Sabemos que o erro do método de Euler é da forma

$$e(t_{k+1}) = \left| \frac{y''(\xi)}{2} h^2 \right|.$$

Como a solução analítica do PVI é $y(t) = e^t$, temos que

$$M_2 = \max_{\xi \in [0,0.04]} |y''(\xi)| = e^{0.04} = 1.0408.$$

Dessa forma,

$$e(t_{k+1}) \leq \frac{1.0408}{2} h^2.$$

Portanto,

$$\frac{1.0408}{2} h^2 \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad h^2 \leq \frac{10^{-3}}{1.0408} \quad \Longrightarrow \quad h \leq 0.0310.$$

Tomemos então $h = 0.02$ pois queremos

$$y(0.04) = y(0 + 2 \times 0.02) \approx y_2.$$

Assim, temos

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0(1 + h) = 1.02.$$

e

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1(1 + h) = 1.02^2 = 1.0404.$$

Finalmente, o erro cometido foi

$$E = |1.0408 - 1.0404| = 4 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}.$$

Métodos de Série de Taylor

De um modo geral, se y for suficientemente suave, a série de Taylor de y centrada em t_k é

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{1}{2}y''(t_k)h^2 + \ldots + \frac{1}{p!}y^{(p)}(t_k)h^p + \frac{1}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\xi)h^{(p+1)}, \quad \text{com } t_k < \xi < t_k + h.$$

Métodos de Série de Taylor

De um modo geral, se y for suficientemente suave, a série de Taylor de y centrada em t_k é

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{1}{2}y''(t_k)h^2 + \ldots + \frac{1}{p!}y^{(p)}(t_k)h^p + \frac{1}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\xi)h^{(p+1)}, \quad \text{com } t_k < \xi < t_k + h.$$

Assim, num método de Série de Taylor de ordem p, definimos

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2}y''_k h^2 + \ldots + \frac{1}{p!}y_k^{(p)}h^p,$$

em que $y_k^{(j)}$ representa uma aproximação para a j-ésima derivada de y em t_k e $h = t_{k+1} - t_k$.

Assumindo $y_k = y(t_k)$, o erro local (de uma única iteração) de um método de série de Taylor de ordem p em t_{k+1} é

$$e(t_{k+1}) = \left| \frac{1}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi) h^{(p+1)} \right|,$$

com $t_k < \xi < t_k + h$.

Assumindo $y_k = y(t_k)$, o erro local (de uma única iteração) de um método de série de Taylor de ordem p em t_{k+1} é

$$e(t_{k+1}) = \left| \frac{1}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi) h^{(p+1)} \right|,$$

com $t_k < \xi < t_k + h$.

Além disso, tomando

$$M_{p+1} = \max_{t_k \leq \xi \leq t_{k+1}} |y^{(p+1)}(\xi)|,$$

concluímos que o erro local satisfaz

$$e(t_{k+1}) \leq \frac{M_{p+1} h^{(p+1)}}{(p+1)!} = Ch^{(p+1)},$$

com $C = \frac{M_{p+1}}{(p+1)!}$.

Definição 3 (Ordem de um Método Numérico para PVI)

Um método numérico para PVI é dito de ordem p se existe uma constante C tal que o erro local (assumindo $y_k = y(t_k)$) satisfaz

$$e(t_{k+1}) < Ch^{p+1},$$

em que C é uma constante que pode depender das derivadas da variável dependente y do PVI.

Os métodos de série de Taylor são de ordem p.

Definição 3 (Ordem de um Método Numérico para PVI)

Um método numérico para PVI é dito de ordem p se existe uma constante C tal que o erro local (assumindo $y_k = y(t_k)$) satisfaz

$$e(t_{k+1}) < Ch^{p+1},$$

em que C é uma constante que pode depender das derivadas da variável dependente y do PVI.

Os métodos de série de Taylor são de ordem p.

Em particular, o método de Euler é um método de ordem 1.

Método de Série de Taylor de Ordem 2

No método de série de Taylor de ordem 2 temos

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2} y''_k h^2.$$

Sabemos que

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) \quad \Longrightarrow \quad y'_k = f(t_k, y_k)$$

Método de Série de Taylor de Ordem 2

No método de série de Taylor de ordem 2 temos

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2} y''_k h^2.$$

Sabemos que

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) \quad \Longrightarrow \quad y'_k = f(t_k, y_k)$$

Denotando $f = f(t, y)$, $f_t = f_t(t, y(t))$ e $f_y = f_y(t, y(t))$, pela derivação implícita encontramos

$$y''(t) = f_t + f_y y' = f_t + f_y f \quad \Longrightarrow \quad y''_k = f_t(t_k, y_k) + f_y(t_k, y_k) f(t_k, y_k).$$

Método de Série de Taylor de Ordem 2

No método de série de Taylor de ordem 2 temos

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2} y''_k h^2.$$

Sabemos que

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) \quad \Longrightarrow \quad y'_k = f(t_k, y_k)$$

Denotando $f = f(t, y)$, $f_t = f_t(t, y(t))$ e $f_y = f_y(t, y(t))$, pela derivação implícita encontramos

$$y''(t) = f_t + f_y y' = f_t + f_y f \quad \Longrightarrow \quad y''_k = f_t(t_k, y_k) + f_y(t_k, y_k) f(t_k, y_k).$$

O método de série de Taylor de ordem 2 é dado por

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\big(f_t(t_k, y_k) + f_y(t_k, y_k) f(t_k, y_k)\big).$$

Exemplo 4

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da série de Taylor de ordem 2 para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Exemplo 4

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da série de Taylor de ordem 2 para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Resposta: Sabemos que o erro do método de série de Taylor de ordem 2 satisfaz

$$e(t_{k+1}) \leq \frac{M_3}{6} h^3.$$

Como a solução analítica do PVI é $y(x) = e^x$, temos que

$$M_3 = \max_{\xi \in [0,0.04]} |y'''(\xi)| = e^{0.04} = 1.0408.$$

Dessa forma,

$$e(t_{k+1}) \leq \frac{1.0408}{6} h^3.$$

Portanto,

$$\frac{1.0408}{6} h^3 \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad h^3 \leq \frac{3 \times 10^{-3}}{1.0408} \quad \Longrightarrow \quad h \leq 0.1423.$$

Tomemos então $h = 0.04$. Assim, temos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\big(f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\big) \\ &= y_0 + hy_0 + \frac{h^2}{2}(0 + 1 \times y_0) = y_0(1 + h + h^2/2) = 1.0408. \end{aligned}$$

O erro cometido trabalhando com 4 casas decimais foi zero!

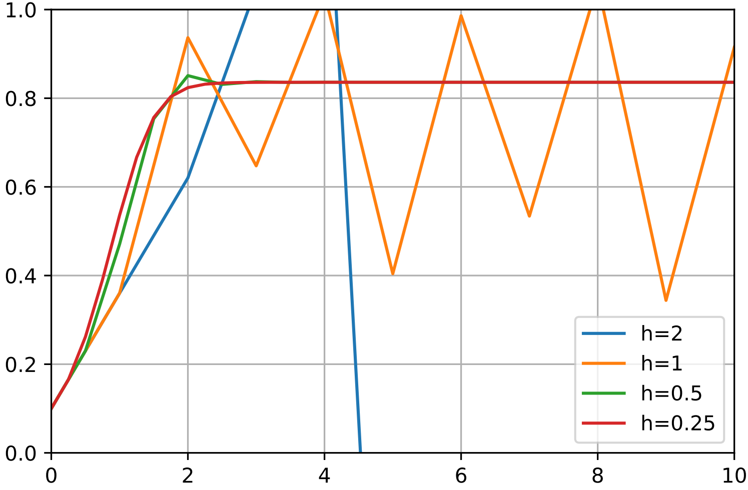
Exemplo 5

Suponha que a densidade populacional p de lagartas seja descrita pelo PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 3p\,(1-p) - \dfrac{p^2}{1+p^2}, \\ p(0) = 0.1, \end{cases}$$

Vamos usar um método numérico para estimar p para $0 \leq t \leq 10$.

Usando o método de Euler com diferentes valores de h, obtemos:



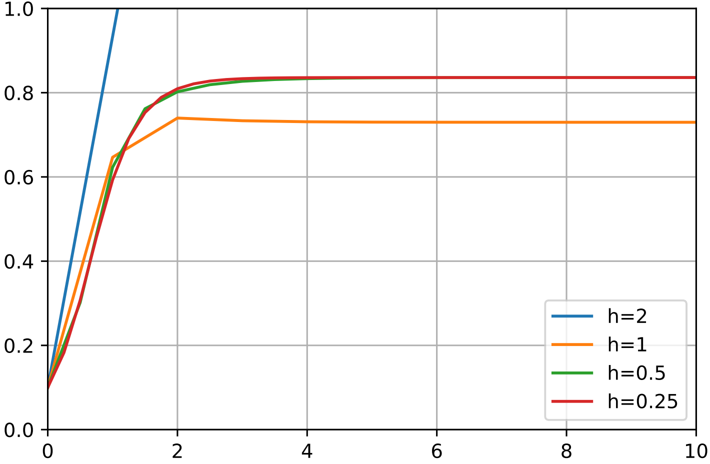
Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-1.07×10^5	0.91505	0.83597	0.83597

Comentários:

- O método de mostrou instável para $h \geq 1.0$.
- Pela tabela, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
- Contudo, olhando o gráfico, percebemos algumas diferenças nas primeiras iterações para $h = 0.5$.

Usando o método de série de Taylor de ordem 2 com diferentes valores de h, temos:



Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-1.07×10^5	0.72977	0.83597	0.83597

Comentários:

- Diferente do método de Euler, o método de Taylor de ordem 2 não divergiu para $h = 1.0$. Porém, observamos diferenças para $h = 1.0$.
- Resultados semelhantes foram obtidos considerando $h \leq 0.5$.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de série de Taylor e uma fórmula para o erro local (erro cometido a cada passo).

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de série de Taylor e uma fórmula para o erro local (erro cometido a cada passo).

Em particular, vimos que o método de Euler é um método de ordem 1. Consequentemente, o erro local é da ordem de h^2.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de série de Taylor e uma fórmula para o erro local (erro cometido a cada passo).

Em particular, vimos que o método de Euler é um método de ordem 1. Consequentemente, o erro local é da ordem de h^2.

Podemos obter erros menores considerando métodos de ordem maior. Contudo, no caso dos métodos da série de Taylor, temos que calcular derivadas parciais de f.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de série de Taylor e uma fórmula para o erro local (erro cometido a cada passo).

Em particular, vimos que o método de Euler é um método de ordem 1. Consequentemente, o erro local é da ordem de h^2.

Podemos obter erros menores considerando métodos de ordem maior. Contudo, no caso dos métodos da série de Taylor, temos que calcular derivadas parciais de f.

Finalmente, ressaltamos que geralmente efetuamos diversos passos para chegar na aproximação t_n. Portanto, há um acumulo de erros!

Muito grato pela atenção!