

# MS211 - Cálculo Numérico

Aula 12 – Sistemas Não-lineares e o Método de Newton.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle  
Matemática Aplicada  
IMECC - Unicamp



# Introdução

---

Nas próximas aulas, estaremos interessados na resolução de sistemas não-lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

em que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as incógnitas e  $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , é um campo escalar.

## Exemplo 1

O sistema não-linear

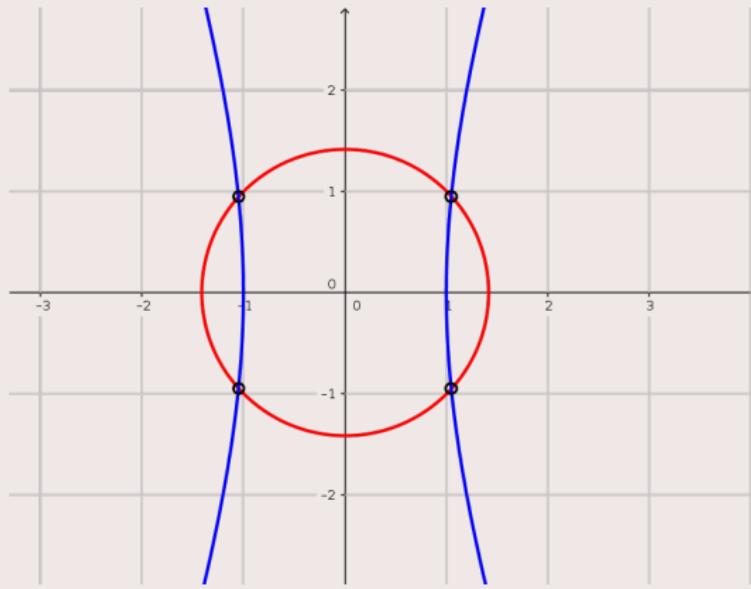
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - \frac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{x_2^2}{9} - 1 = 0. \end{cases}$$

## Exemplo 1

Geometricamente, desejamos encontrar os quatro pontos que pertencem à ambas as curvas  $x_1^2 + x_2^2 = 2$  e  $x_1^2 - x_2^2/9 = 1$ .



## Exemplo 2

O sistema não-linear

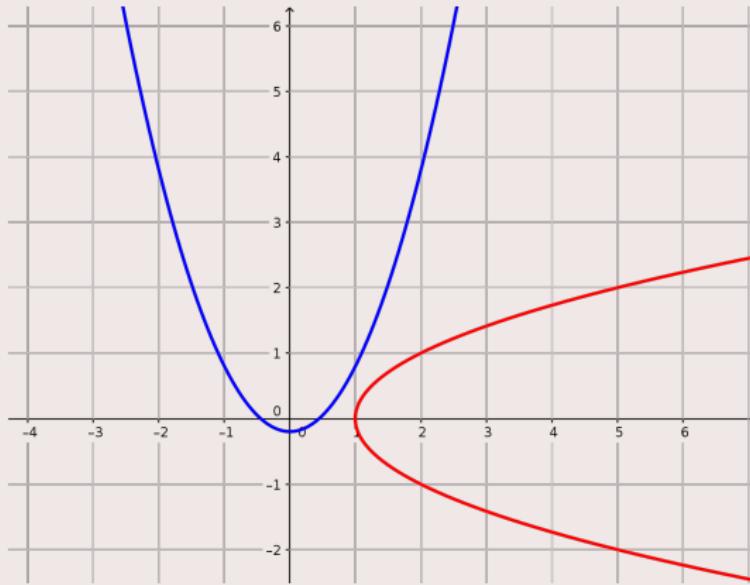
$$\begin{cases} x^2 - y = 0.2, \\ x - y^2 = 1. \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 0.2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

## Exemplo 2

Observe que as curvas  $y = x^2 - 0.2$  e  $x = 1 + y^2$  não se interceptam.



Logo, esse sistema não admite solução!

# Notação

---

Denotaremos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, o sistema não-linear

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

pode ser escrito de forma compacta como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

# Formulação do Problema e Hipóteses

---

## Resolução de Sistema Não-Linear

Dada uma função  $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , determine  $\mathbf{x}^* \in D$  tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Em geral, assumiremos a existência da solução  $\mathbf{x}^* \in D$ .

Assumiremos também que o domínio  $D$  de  $\mathbf{F}$  é um conjunto aberto e  $\mathbf{F}$  possui derivadas contínuas nesse conjunto.

# Vetor Gradiente

---

## Definição 3 (Vetor Gradiente)

O vetor das derivadas parciais de  $f_i$ , denotado por

$$\nabla f_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

é chamado **vetor gradiente** de  $f_i$ .

# Matriz Jacobiana

## Definição 4 (Matriz Jacobiana)

A matriz das derivadas parciais de  $\mathbf{F}$ , denotada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

é chamada **matriz Jacobiana** de  $\mathbf{F}$ .

# Matriz Jacobiana

---

## Definição 4 (Matriz Jacobiana)

A matriz das derivadas parciais de  $\mathbf{F}$ , denotada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

é chamada **matriz Jacobiana** de  $\mathbf{F}$ .

---

Note que a  $i$ -ésima linha de  $J(\mathbf{x})$  contém o gradiente  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  de  $f_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

# Aproximação Linear

---

## Aproximação Linear

A aproximação linear  $\mathbf{L}$  de uma função não-linear  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  em um ponto  $\mathbf{a} \in D$  é dada pela equação

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{J}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

## Exemplo 5

Determine a matriz Jacobiana da função  $\mathbf{F}$  do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo 5

Determine a matriz Jacobiana da função  $\mathbf{F}$  do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Resposta:** A matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}$  é

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 6 (Tridiagonal de Broyden)

Determine a matriz Jacobiana da função  $\mathbf{F}$  do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ \vdots \\ -x_{i-1} - 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} + 1 \\ \vdots \\ -2x_n^2 + 3x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo 6 (Tridiagonal de Broyden)

Determine a matriz Jacobiana da função  $\mathbf{F}$  do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ \vdots \\ -x_{i-1} - 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} + 1 \\ \vdots \\ -2x_n^2 + 3x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Resposta:** A matriz Jacobina de  $\mathbf{F}$  é

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -4x_1 + 3 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -4x_2 + 3 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -4x_n + 3 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz tridiagonal.

# Método de Newton

---

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

# Método de Newton

---

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

---

Vimos anteriormente que o método de Netwon determina, a cada iteração, a solução da aproximação linear da função.

# Método de Newton

---

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

---

Vimos anteriormente que o método de Netwon determina, a cada iteração, a solução da aproximação linear da função.

---

Dessa forma, conhecida uma aproximação  $\mathbf{x}^{(k)}$ , o método de Newton define  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  como sendo a solução do sistema linear

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0},$$

ou seja,  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  é tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Tomando  $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ , conhecido por **passo de Newton**, temos que a nova aproximação é

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)},$$

em que  $\mathbf{s}^{(k)}$  é a solução do sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Tomando  $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ , conhecido por **passo de Newton**, temos que a nova aproximação é

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)},$$

em que  $\mathbf{s}^{(k)}$  é a solução do sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

---

Resumindo, dado uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ , o método de Newton define a sequência  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  através dos seguintes passos:

- Resolva o sistema linear:  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ .
- Defina a próxima aproximação:  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$ .

Espera-se que a sequência converja para a solução  $\mathbf{x}^*$  do sistema não-linear  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

## Exemplo 7

Efetue uma iteração do método de Newton, com  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 5]^T$ , para determinar a solução do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y - 3 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são  $\mathbf{x}^{*1} = [3, 0]^T$  e  $\mathbf{x}^{*2} = [0, 3]^T$ .

## Exemplo 7

Efetue uma iteração do método de Newton, com  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 5]^T$ , para determinar a solução do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y - 3 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são  $\mathbf{x}^{*1} = [3, 0]^T$  e  $\mathbf{x}^{*2} = [0, 3]^T$ .

**Resposta:** Primeiramente, observe que a matriz Jacobiana da função  $\mathbf{F}$  em um ponto  $(x, y)$  arbitrário é

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

Considerando  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 5]^T$ , temos:

$$\mathbf{J}(1, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(1, 5) = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix},$$

encontramos o passo de Newton

$$\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -13/8 \\ -11/8 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos  $\mathbf{x}^{(1)} = [-5/8, 29/8]^T$ .

# Critério de Parada

---

Dada uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ , efetuamos as iterações do método de Netwon até:

- não detectarmos alterações significativas de uma iteração para a outra, ou seja,

$$D_r = \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty} \leq \tau, \quad \text{com } \tau > 0,$$

**ou**

- encontrarmos  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)})$  próximo do vetor nulo, isto é,

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)})\|_{\infty} \leq \epsilon, \quad \text{com } \epsilon > 0,$$

**ou**

- até atingirmos um número máximo  $k_{max}$  de iterações!

# Algoritmo do Método de Newton

---

**Entrada:** Função não-linear  $\mathbf{F}$  e sua matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$ ;  
Aproximação da solução  $\mathbf{x}$ .

**Dados:** Número máximo de interações  $k_{max}$ ; tolerâncias  $\tau$  e  $\epsilon$ .

*Incialize:*  $k = 0$ ,  $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  e  $Dr = \tau + 1$ .

**enquanto**  $k \leq k_{max}$ ,  $\|\mathbf{F}_x\|_{\infty} > \epsilon$  e  $Dr > \tau$  **faça**

1. Atualize:  $k = k + 1$ .
2. Resolva:  $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{s} = -\mathbf{F}_x$ .
3. Atualize:  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$ .
4. Calcule:  $Dr = \|\mathbf{s}\|_{\infty}$ .
5. Avalie:  $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

**fim**

**Saída:** Aproximação para a solução é  $\mathbf{x}$ .

---

# Considerações Finais

---

Observe que cada iteração do método de Newton requer:

1. Avaliação da matriz Jacobiana.
2. Resolução de um sistema linear.

Logo, o método de Newton é computacionalmente caro!

# Considerações Finais

---

Observe que cada iteração do método de Newton requer:

1. Avaliação da matriz Jacobiana.
2. Resolução de um sistema linear.

Logo, o método de Newton é computacionalmente caro!

---

A vantagem é que, **sob certas condições** sobre a aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ , a função  $\mathbf{F}$  e a matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$ , a sequência  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  produzida pelo método de Newton **converge** para a solução de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  com **taxa quadrática**.

Muito grato pela atenção!