

MS211 - Cálculo Numérico

Aula 12 – Sistemas Não-lineares e o Método de Newton.



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp



Introdução

Nas próximas aulas, estaremos interessados na resolução de sistemas não-lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

em que x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas e $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, n$, é um campo escalar.

Exemplo 1

O sistema não-linear

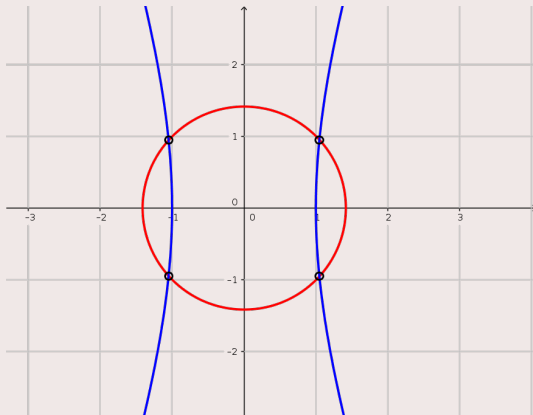
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - \frac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{x_2^2}{9} - 1 = 0. \end{cases}$$

Exemplo 1

Geometricamente, desejamos encontrar os quatro pontos que pertencem à ambas as curvas $x_1^2 + x_2^2 = 2$ e $x_1^2 - x_2^2/9 = 1$.



Exemplo 2

O sistema não-linear

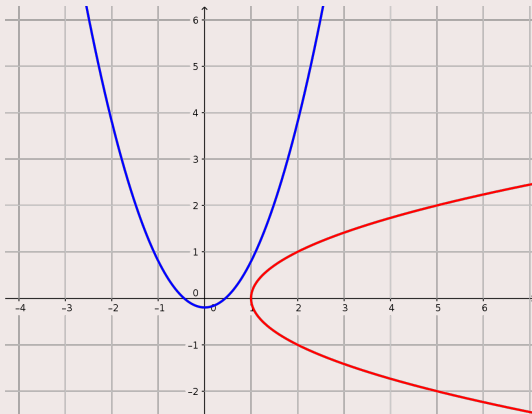
$$\begin{cases} x^2 - y = 0.2, \\ x - y^2 = 1. \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 0.2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Exemplo 2

Observe que as curvas $y = x^2 - 0.2$ e $x = 1 + y^2$ não se interceptam.



Logo, esse sistema não admite solução!

Notação

Denotaremos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, o sistema não-linear

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

pode ser escrito de forma compacta como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Formulação do Problema e Hipóteses

Resolução de Sistema Não-Linear

Dada uma função $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, determine $\mathbf{x}^* \in D$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Em geral, assumiremos a existência da solução $\mathbf{x}^* \in D$.

Assumiremos também que o domínio D de \mathbf{F} é um conjunto aberto e \mathbf{F} possui derivadas contínuas nesse conjunto.

Vetor Gradiente

Definição 3 (Vetor Gradiente)

O vetor das derivadas parciais de f_i , denotado por

$$\nabla f_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

é chamado **vetor gradiente** de f_i .

Matriz Jacobiana

Definição 4 (Matriz Jacobiana)

A matriz das derivadas parciais de \mathbf{F} , denotada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

é chamada **matriz Jacobiana** de \mathbf{F} .

Matriz Jacobiana

Definição 4 (Matriz Jacobiana)

A matriz das derivadas parciais de \mathbf{F} , denotada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

é chamada **matriz Jacobiana** de \mathbf{F} .

Note que a i -ésima linha de $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ contém o gradiente $\nabla f_i(\mathbf{x})$ de f_i , para $i = 1, \dots, n$.

Aproximação Linear

Aproximação Linear

A aproximação linear \mathbf{L} de uma função não-linear $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ em um ponto $\mathbf{a} \in D$ é dada pela equação

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{J}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Exemplo 5

Determine a matriz Jacobiana da função \mathbf{F} do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5

Determine a matriz Jacobiana da função \mathbf{F} do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A matriz Jacobiana de \mathbf{F} é

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6 (Tridiagonal de Broyden)

Determine a matriz Jacobiana da função \mathbf{F} do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ \vdots \\ -x_{i-1} - 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} + 1 \\ \vdots \\ -2x_n^2 + 3x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6 (Tridiagonal de Broyden)

Determine a matriz Jacobiana da função \mathbf{F} do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ \vdots \\ -x_{i-1} - 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} + 1 \\ \vdots \\ -2x_n^2 + 3x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A matriz Jacobina de \mathbf{F} é

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -4x_1 + 3 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -4x_2 + 3 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -4x_n + 3 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz tridiagonal.

Método de Newton

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

Método de Newton

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

Vimos anteriormente que o método de Newton determina, a cada iteração, a solução da aproximação linear da função.

Método de Newton

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

Vimos anteriormente que o método de Newton determina, a cada iteração, a solução da aproximação linear da função.

Dessa forma, conhecida uma aproximação $\mathbf{x}^{(k)}$, o método de Newton define $\mathbf{x}^{(k+1)}$ como sendo a solução do sistema linear

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0},$$

ou seja, $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Tomando $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, conhecido por **passo de Newton**, temos que a nova aproximação é

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)},$$

em que $\mathbf{s}^{(k)}$ é a solução do sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Tomando $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, conhecido por **passo de Newton**, temos que a nova aproximação é

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)},$$

em que $\mathbf{s}^{(k)}$ é a solução do sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Resumindo, dado uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o método de Newton define a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ através dos seguintes passos:

- Resolva o sistema linear: $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$.
- Defina a próxima aproximação: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$.

Espera-se que a sequência convirja para a solução \mathbf{x}^* do sistema não-linear $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Exemplo 7

Efetue uma iteração do método de Newton, com $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 5]^T$, para determinar a solução do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y - 3 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são $\mathbf{x}^{*1} = [3, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{*2} = [0, 3]^T$.

Exemplo 7

Efetue uma iteração do método de Newton, com $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 5]^T$, para determinar a solução do sistema não-linear:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y - 3 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são $\mathbf{x}^{*1} = [3, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{*2} = [0, 3]^T$.

Resposta: Primeiramente, observe que a matriz Jacobiana da função \mathbf{F} em um ponto (x, y) arbitrário é

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

Considerando $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 5]^T$, temos:

$$\mathbf{J}(1, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(1, 5) = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix},$$

encontramos o passo de Newton

$$\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -13/8 \\ -11/8 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos $\mathbf{x}^{(1)} = [-5/8, 29/8]^T$.

Critério de Parada

Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, efetuamos as iterações do método de Newton até:

- não detectarmos alterações significativas de uma iteração para a outra, ou seja,

$$D_r = \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty \leq \tau, \quad \text{com } \tau > 0,$$

ou

- encontrarmos $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)})$ próximo do vetor nulo, isto é,

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)})\|_\infty \leq \epsilon, \quad \text{com } \epsilon > 0,$$

ou

- até atingirmos um número máximo k_{max} de iterações!

Algoritmo do Método de Newton

Entrada: Função não-linear \mathbf{F} e sua matriz Jacobiana \mathbf{J} ;
Aproximação da solução \mathbf{x} .

Dados: Número máximo de interações k_{max} ; tolerâncias τ e ϵ .

Inicialize: $k = 0$, $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ e $Dr = \tau + 1$.

enquanto $k \leq k_{max}$, $\|\mathbf{F}_x\|_\infty > \epsilon$ e $Dr > \tau$ **faça**

1. Atualize: $k = k + 1$.
2. Resolva: $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{s} = -\mathbf{F}_x$.
3. Atualize: $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
4. Calcule: $Dr = \|\mathbf{s}\|_\infty$.
5. Avalie: $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

fim

Saída: Aproximação para a solução é \mathbf{x} .

Considerações Finais

Observe que cada iteração do método de Newton requer:

1. Avaliação da matriz Jacobiana.
2. Resolução de um sistema linear.

Logo, o método de Newton é computacionalmente caro!

Considerações Finais

Observe que cada iteração do método de Newton requer:

1. Avaliação da matriz Jacobiana.
2. Resolução de um sistema linear.

Logo, o método de Newton é computacionalmente caro!

A vantagem é que, **sob certas condições** sobre a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, a função \mathbf{F} e a matriz Jacobiana \mathbf{J} , a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ produzida pelo método de Newton **converge** para a solução de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ com **taxa quadrática**.

Muito grato pela atenção!