MS211 - Cálculo Numérico

Aula 11 – Método de Newton e da Secante.

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Introdução

Nas aulas anteriores estudamos os métodos da bissecção, posição falsa e também o método do ponto fixo para aproximar a solução do seguinte problema:

Introdução

Nas aulas anteriores estudamos os métodos da bissecção, posição falsa e também o método do ponto fixo para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que

$$f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Método do Ponto Fixo

Dizemos que x^* é um **ponto fixo** de uma função real φ se

$$x^* = \varphi(x^*).$$

Método do Ponto Fixo

Dizemos que x^* é um **ponto fixo** de uma função real φ se

$$x^* = \varphi(x^*).$$

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, definimos

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Método do Ponto Fixo

Dizemos que x^* é um **ponto fixo** de uma função real φ se

$$x^* = \varphi(x^*).$$

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, definimos

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Se φ é uma função com derivada φ' contínua em um intervalo I que contém o ponto fixo x^*, com $|\varphi'(x)| \leqslant M < 1$ para todo $x \in I$, então para qualquer aproximação inicial $x^{(0)} \in I$, a sequência $\{x^{(k)}\}$ produzida pelo método do ponto fixo converge para x^*.

Método do Ponto Fixo

Dizemos que x^* é um **ponto fixo** de uma função real φ se

$$x^* = \varphi(x^*).$$

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, definimos

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Se φ é uma função com derivada φ' contínua em um intervalo I que contém o ponto fixo x^*, com $|\varphi'(x)| \leqslant M < 1$ para todo $x \in I$, então para qualquer aproximação inicial $x^{(0)} \in I$, a sequência $\{x^{(k)}\}$ produzida pelo método do ponto fixo converge para x^*.

A convergência do método do ponto fixo será tanto mais rápida quanto menor for o valor de M.

Taxas de Convergência

Definição 1 (Convergência Linear e Quadrática)

Seja $\{x^{(k)}\}$, com $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, uma sequência de aproximações produzida por um método numérico.

- Dizemos que $\{x^{(k)}\}$ **converge linearmente** para x^* se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = c, \quad \text{com } 0 < c < 1.$$

Taxas de Convergência

Definição 1 (Convergência Linear e Quadrática)

Seja $\{x^{(k)}\}$, com $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, uma sequência de aproximações produzida por um método numérico.

- Dizemos que $\{x^{(k)}\}$ **converge linearmente** para x^* se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = c, \quad \text{com } 0 < c < 1.$$

- Dizemos que $\{x^{(k)}\} \to x^*$ com **ordem de convergência** $p > 1$ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^p} = c, \quad \text{com } c > 0.$$

  Em particular, se $p = 2$, tem-se **convergência quadrática**.

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Portanto, temos também que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = M < 1.$$

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Portanto, temos também que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = M < 1.$$

Logo, o método do ponto fixo tem convergência pelo menos linear.

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Portanto, temos também que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = M < 1.$$

Logo, o método do ponto fixo tem convergência pelo menos linear.

Podemos ter uma taxa de convergência melhor que linear se $M = 0$!

Motivação Algébrica para o Método de Newton

- Suponha que queremos calcular a raiz x^* de uma função f usando o método do ponto fixo.

Motivação Algébrica para o Método de Newton

- Suponha que queremos calcular a raiz x^* de uma função f usando o método do ponto fixo.
- Podemos definir a função

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$

em A é tal que $A(x^*) \neq 0$.

Motivação Algébrica para o Método de Newton

- Suponha que queremos calcular a raiz x^* de uma função f usando o método do ponto fixo.
- Podemos definir a função
$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$
em A é tal que $A(x^*) \neq 0$.
- Com intuito de obter uma rápida convergência, vamos escolher $A(x)$ de modo que $\varphi'(x^*) = 0$.

Motivação Algébrica para o Método de Newton

- Suponha que queremos calcular a raiz x^* de uma função f usando o método do ponto fixo.
- Podemos definir a função

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$

em A é tal que $A(x^*) \neq 0$.
- Com intuito de obter uma rápida convergência, vamos escolher $A(x)$ de modo que $\varphi'(x^*) = 0$.
- Pela regra do produto, temos que

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x).$$

Motivação Algébrica para o Método de Newton

- Suponha que queremos calcular a raiz x^* de uma função f usando o método do ponto fixo.
- Podemos definir a função

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$

em A é tal que $A(x^*) \neq 0$.
- Com intuito de obter uma rápida convergência, vamos escolher $A(x)$ de modo que $\varphi'(x^*) = 0$.
- Pela regra do produto, temos que

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x).$$

Lembrando que $f(x^*) = 0$, obtemos $A(x^*) = -\dfrac{1}{f'(x^*)}$.

Motivação Algébrica para o Método de Newton

- Suponha que queremos calcular a raiz x^* de uma função f usando o método do ponto fixo.
- Podemos definir a função
$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$
em A é tal que $A(x^*) \neq 0$.
- Com intuito de obter uma rápida convergência, vamos escolher $A(x)$ de modo que $\varphi'(x^*) = 0$.
- Pela regra do produto, temos que
$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x).$$
Lembrando que $f(x^*) = 0$, obtemos $A(x^*) = -\dfrac{1}{f'(x^*)}$.
- Assim, basta escolher $A(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$.

Método de Newton

Definição 2 (Método de Newton)

Dada uma função diferenciável f e uma aproximação inicial $x^{(0)}$ da raiz x^* de f, defina a sequência

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots .$$

Espera-se que a sequência $x^{(k)}$ convirja para a raiz x^*!

Teorema 3 (Convergência do Método de Newton)

Seja f uma função contínua com derivadas de primeira e segunda ordem f' e f'' contínuas em um intervalo I que contém a raiz x^* de f. Se $f'(x^*) \neq 0$ então existe um subintervalo $\bar{I} \subseteq I$, que contém x^*, tal que a sequência $\{x^{(k)}\}$ gerada pelo método de Newton converge pelo menos quadraticamente para x^* para todo $x^{(0)} \in \bar{I}$.

Demonstração da convergência pelo menos quadrática:
O desenvolvimento de Taylor de f em torno de $x^{(k)}$ fornece

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x - x^{(k)})^2,$$

em que $\eta^{(k)}$ está entre x e $x^{(k)}$.

Demonstração da convergência pelo menos quadrática:
O desenvolvimento de Taylor de f em torno de $x^{(k)}$ fornece

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x - x^{(k)})^2,$$

em que $\eta^{(k)}$ está entre x e $x^{(k)}$. Tomando $x = x^*$, encontramos

$$f(x^*) = f(x^{(k)}) - f'(x^{(k)})(x^{(k)} - x^*) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x^{(k)} - x^*)^2 = 0.$$

Demonstração da convergência pelo menos quadrática:
O desenvolvimento de Taylor de f em torno de $x^{(k)}$ fornece

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x - x^{(k)})^2,$$

em que $\eta^{(k)}$ está entre x e $x^{(k)}$. Tomando $x = x^*$, encontramos

$$f(x^*) = f(x^{(k)}) - f'(x^{(k)})(x^{(k)} - x^*) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x^{(k)} - x^*)^2 = 0.$$

Dividindo ambos os lados dessa equação por $-f'(x^{(k)})$, obtemos

$$x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - x^* = \frac{f''(\eta^{(k)})}{2f'(x^{(k)})}(x^{(k)} - x^*)^2,$$

Demonstração da convergência pelo menos quadrática:
O desenvolvimento de Taylor de f em torno de $x^{(k)}$ fornece

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x - x^{(k)})^2,$$

em que $\eta^{(k)}$ está entre x e $x^{(k)}$. Tomando $x = x^*$, encontramos

$$f(x^*) = f(x^{(k)}) - f'(x^{(k)})(x^{(k)} - x^*) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x^{(k)} - x^*)^2 = 0.$$

Dividindo ambos os lados dessa equação por $-f'(x^{(k)})$, obtemos

$$x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - x^* = \frac{f''(\eta^{(k)})}{2f'(x^{(k)})}(x^{(k)} - x^*)^2,$$

ou seja,

$$\frac{x^{(k+1)} - x^*}{(x^{(k)} - x^*)^2} = \frac{f''(\eta^{(k)})}{2f'(x^{(k)})}.$$

Finalmente, sendo f' e f'' contínuas e, como ambas sequências $\{x^{(k)}\}$ e $\{\eta^{(k)}\}$ convergem para x^*, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\eta^{(k)})|}{2|f'(x^{(k)})|} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} = c.$$

Logo, quando converge, o método de Newton tem convergência pelo menos quadrática. $\square$

Motivação Geométrica para o Método de Newton

O método de Newton tem a seguinte interpretação geométrica.

Motivação Geométrica para o Método de Newton

O método de Newton tem a seguinte interpretação geométrica.

Considere a reta tangente à f no ponto $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ dada por

$$L(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}).$$

Motivação Geométrica para o Método de Newton

O método de Newton tem a seguinte interpretação geométrica.

Considere a reta tangente à f no ponto $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ dada por

$$L(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}).$$

Define-se $x^{(k+1)}$ como sendo a raiz de L, que pode ser vista como uma aproximação linear de f numa vizinhança de $x^{(k)}$.

Motivação Geométrica para o Método de Newton

O método de Newton tem a seguinte interpretação geométrica.

Considere a reta tangente à f no ponto $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ dada por

$$L(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}).$$

Define-se $x^{(k+1)}$ como sendo a raiz de L, que pode ser vista como uma aproximação linear de f numa vizinhança de $x^{(k)}$.

Formalmente, $L(x^{(k+1)}) = 0$ se, e somente se,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Método de Newton

No algoritmo abaixo, denotaremos $x = x^{(k)}$ e $\tilde{x} = x^{(k+1)}$ aproximações consecutivas da raiz de $f(x) = 0$.

Método de Newton

No algoritmo abaixo, denotaremos $x = x^{(k)}$ e $\tilde{x} = x^{(k+1)}$ aproximações consecutivas da raiz de $f(x) = 0$.

Entrada: Função f e sua derivada f'; aproximação inicial x.
Dados: Número máximo de interações k_{max}; tolerâncias δ e ϵ.
Inicialize: $k = 0$, $f = f(x)$ *e* $Dr = \delta + 1$.
enquanto $k \leqslant k_{max}$, $|f| > \epsilon$ *e* $Dr > \delta$ **faça**
    Atualize: $k = k + 1$.
    Defina: $\tilde{x} = x - \dfrac{f}{f'(x)}$.
    Calcule: $Dr = |\tilde{x} - x|$.
    Atualize: $x = \tilde{x}$.
    Avalie: $f = f(x)$.
Saída: Aproximação $\tilde{x}$ para a raiz de $f(x) = 0$.

Exemplo 4

Use o método de Newton para encontrar uma estimativa para a raiz **positiva** da função

$$f(x) = e^x - 2x - 1,$$

com aproximação inicial $x^{(0)} = 1$ e tolerâncias $\delta = 0.1$ e $\epsilon = 0.1$. Interprete geometricamente o método de Newton.

Resposta:
Primeiramente, observe que

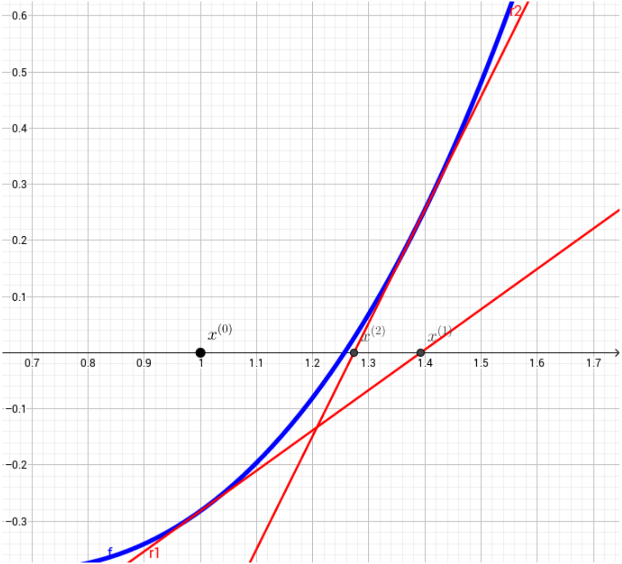
$$f(x) = e^x - 2x - 1 \quad \text{e} \quad f'(x) = e^x - 2.$$

Começando com a aproximação inicial $x^{(0)} = 1$, construímos a tabela em que $D_r = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$:

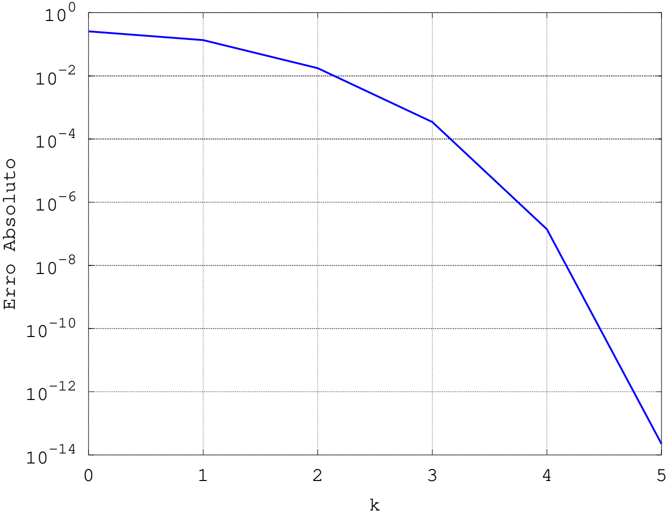
k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	D_r
0	1.00000	-0.28172	0.71828	0.39221
1	1.39221	0.23932	2.02374	0.11825
2	1.273957	0.027057	—	—

Terminamos as iterações porque a condição $|f(x^{(k)})| < \varepsilon$ foi satisfeita.
A aproximação fornecida pelo método de Newton é $\tilde{x} = 1.273957$.

Interpretação geométrica do método de Newton.



O gráfico abaixo mostra o erro absoluto pelas interações do método de Newton se considerarmos a mesma aproximação inicial $x^{(0)} = 1$ mas as tolerâncias $\delta = 10^{-7}$ e $\epsilon = 10^{-7}$.



Método da Secante

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter e avaliar f' a cada iteração.

Método da Secante

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter e avaliar f' a cada iteração.

No método da secante, substituímos a derivada $f'(x^{(k)})$ pelo quociente das diferenças

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}},$$

em que $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ representam duas aproximações para x^*.

Método da Secante

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter e avaliar f' a cada iteração.

No método da secante, substituímos a derivada $f'(x^{(k)})$ pelo quociente das diferenças

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}},$$

em que $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ representam duas aproximações para x^*.

Geometricamente, dadas as aproximações $x^{(k-1)}$ e $x^{(k)}$, defina $x^{(k+1)}$ como sendo a abcissa do ponto de intersecção do eixo horizontal com a reta secante que passa pelos pontos $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ e $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$.

Definição 5 (Método da Secante)

Dada uma função f e duas aproximações iniciais $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ da raiz x^* de f, defina a sequência para $k = 1, 2, \ldots$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})},$$

ou, equivalentemente,

$$d^{(k)} = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}} \quad \text{e} \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{d^{(k)}}.$$

Espera-se que a sequência $x^{(k)}$ convirja para a raiz x^*!

Teorema 6 (Convergência do Método da Secante)

Suponha que f e sua derivada f' são contínuas num intervalo I que contém a raiz x^* de f. Se $f'(x^*) \neq 0$ e $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ são suficientemente próximos de x^*, então a sequência $\{x^{(k)}\}$ produzida pelo método da secante converge para x^* com

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^p} = c,$$

em que $c > 0$ e $p = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.6$.

Método da Secante

No algoritmo abaixo, $x_0 = x^{(k-1)}$, $x_1 = x^{(k)}$ e $\tilde{x} = x^{(k+1)}$ denotam aproximações consecutivas da raiz da equação $f(x) = 0$.

Entrada: Função f; aproximações iniciais x_0 e x_1.
Dados: Número máximo de interações k_{max}; tolerâncias δ e ϵ.
Inicialize: $k = 0$, $Dr = \delta + 1$, $f_0 = f(x_0)$ *e* $f_1 = f(x_1)$.
enquanto $k \leqslant k_{max}$, $|f_1| > \epsilon$ *e* $Dr > \delta$ **faça**

- Atualize: $k = k + 1$.
- Defina: $d = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ e $\tilde{x} = x_1 - \dfrac{f_1}{d}$.
- Calcule: $Dr = |\tilde{x} - x_1|$.
- Atualize: $x_0 = x_1$, $f_0 = f_1$, $x_1 = \tilde{x}$.
- Avalie: $f_1 = f(x_1)$.

Saída: Aproximação $\tilde{x}$ para a raiz de f.

Definimos $f_1 = f(x_1)$ e $f_0 = f(x_0)$ para diminuir o número de avaliações da função f.

Exemplo 7

Use o método da secante para encontrar uma estimativa para a raiz **positiva** da função

$$f(x) = e^x - 2x - 1,$$

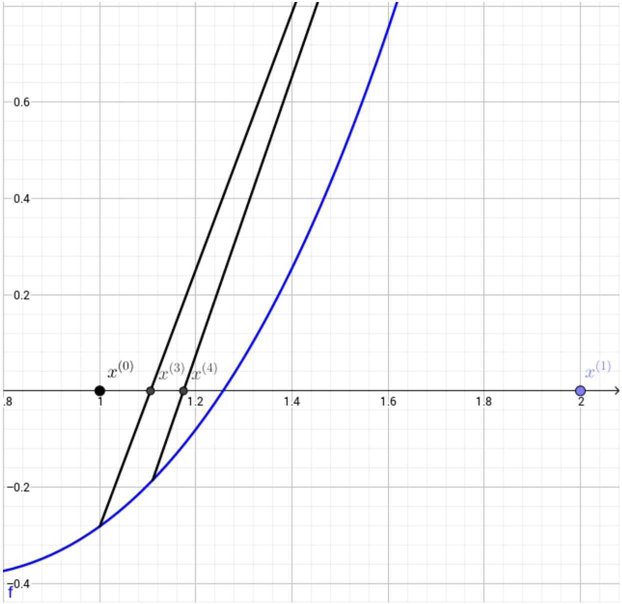
com aproximações iniciais $x^{(0)} = 1$ e $x^{(1)} = 2$ e tolerâncias $\delta = 0.1$ e $\epsilon = 0.1$. Interprete geometricamente o método da secante.

Resposta:
Começando com as aproximações $x^{(0)} = 1$ e $x^{(1)} = 2$, construímos a tabela abaixo em que $D_r = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$:

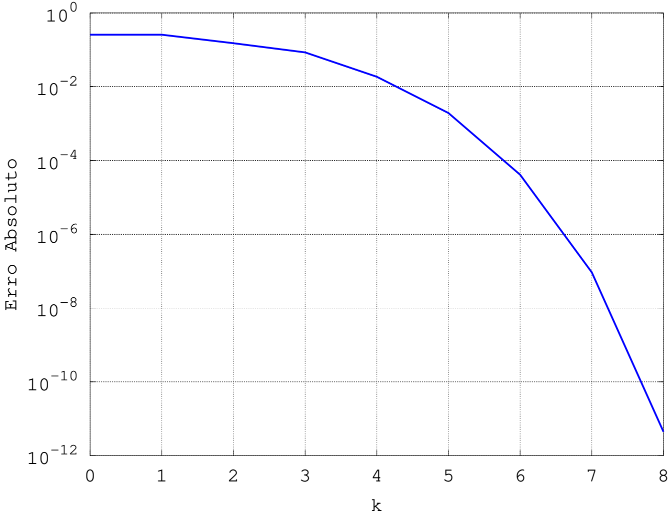
k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	D_r
0	1.0000	-0.28172	1.0000
1	2.0000	2.3891	0.89452
2	1.10548	-0.19028	0.065991
3	1.171473	-0.116204	—

Terminamos as iterações porque a condição $|f(x^{(k)}| < \varepsilon$ foi satisfeita.
A aproximação fornecida pelo método de Newton é $\tilde{x} = 1.273957$.

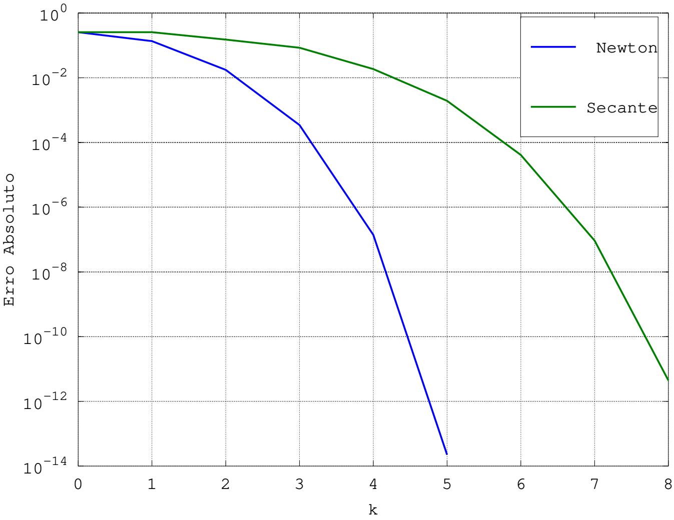
Interpretação geométrica do método da Secante.



O gráfico abaixo mostra o erro absoluto pelas interações do método da secante, com as mesmas aproximações iniciais $x^{(0)} = 1$ e $x^{(1)} = 2$, mas as tolerâncias $\delta = 10^{-7}$ e $\epsilon = 10^{-7}$.



O gráfico abaixo mostra o erro absoluto pelas interações dos métodos de Newton e secante.



Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de Newton, que possui convergência quadrática.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de Newton, que possui convergência quadrática.

Geometricamente, a próxima aproximação do método de Newton é obtida encontrando a raiz de uma aproximação linear da função.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de Newton, que possui convergência quadrática.

Geometricamente, a próxima aproximação do método de Newton é obtida encontrando a raiz de uma aproximação linear da função.

Apresentamos também o método da secante, que pode ser visto como uma aproximação do método de Newton sem calcular a derivada da função f mas possui convergência superlinear.

Muito grato pela atenção!

Demonstração da convergência do método de Newton:

Demonstração da convergência do método de Newton:

Devemos mostrar que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

satisfaz o teorema de convergência do ponto fixo.

Demonstração da convergência do método de Newton:

Devemos mostrar que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

satisfaz o teorema de convergência do ponto fixo.

Da regra do quociente, temos

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\big(f(x)\big)^2}.$$

Demonstração da convergência do método de Newton:

Devemos mostrar que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

satisfaz o teorema de convergência do ponto fixo.

Da regra do quociente, temos

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\big(f(x)\big)^2}.$$

Sendo $f'(x^*) \neq 0$ e $f'(x)$ é contínua em I, existe um intervalo $I_1 \subseteq I$ tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I_1$.

Temos também que f, f' e f'' são contínuas em I_1 com $f''(x) \neq 0$.

Temos também que f, f' e f'' são contínuas em I_1 com $f''(x) \neq 0$.

Portanto, φ e φ' são ambas contínuas em I_1.

Temos também que f, f' e f'' são contínuas em I_1 com $f''(x) \neq 0$.

Portanto, φ e φ' são ambas contínuas em I_1.

Além disso, como $\varphi'(x^*) = 0$, é possível escolher um subintervalo $\bar{I} \subseteq I_1$, centrado em x^*, tal que $|\varphi'(x)| < 1$ para todo $x \in \bar{I}$.

Temos também que f, f' e f'' são contínuas em I_1 com $f''(x) \neq 0$.

Portanto, φ e φ' são ambas contínuas em I_1.

Além disso, como $\varphi'(x^*) = 0$, é possível escolher um subintervalo $\bar{I} \subseteq I_1$, centrado em x^*, tal que $|\varphi'(x)| < 1$ para todo $x \in \bar{I}$.

Dessa forma, φ satisfaz as hipóteses do teorema de convergência do método do ponto fixo.

Temos também que f, f' e f'' são contínuas em I_1 com $f''(x) \neq 0$.

Portanto, φ e φ' são ambas contínuas em I_1.

Além disso, como $\varphi'(x^*) = 0$, é possível escolher um subintervalo $\bar{I} \subseteq I_1$, centrado em x^*, tal que $|\varphi'(x)| < 1$ para todo $x \in \bar{I}$.

Dessa forma, φ satisfaz as hipóteses do teorema de convergência do método do ponto fixo.

Logo, a sequência $\{x^{(k)}\}$ produzida pelo método de Newton converge para x^*.