# MS211 - Cálculo Numérico

## Aula 10 – Métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

# Introdução

Uma matriz **A** é dita esparsa se possui uma quantidade relativamente pequena de elementos não-nulos.

# Introdução

Uma matriz $\mathbf{A}$ é dita esparsa se possui uma quantidade relativamente pequena de elementos não-nulos.

Matrizes esparsas aparecem em muitas áreas como teoria dos grafos e resolução numérica de equações diferenciais.

# Introdução

Uma matriz **A** é dita esparsa se possui uma quantidade relativamente pequena de elementos não-nulos.

Matrizes esparsas aparecem em muitas áreas como teoria dos grafos e resolução numérica de equações diferenciais.

Exemplos incluem:

- O *Google* trabalha com matrizes gigantescas contendo informações dos *links* das páginas na *internet*. Essas matrizes geralmente são esparsas e algumas delas possuem aproximadamente 10 elementos não-nulos por linha ou coluna. A multiplicação dessas matrizes por um vetor requer aproximadamente $20n$ operações aritméticas, em que $n$ denota a dimensão do vetor.
- A cúpula geodésica.

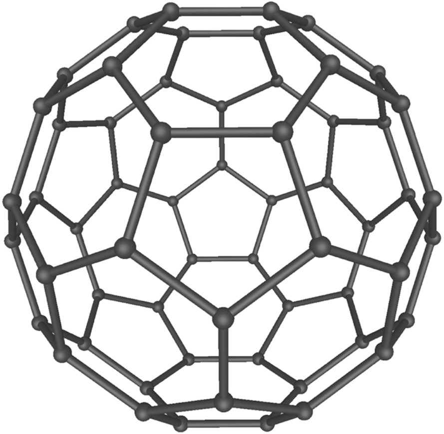
# Cúpula Geodésica

Richard Buckminster (Bucky) Fuller desenvolveu estruturas chamadas **cúpulas ou domos geodésicos.**

("Biosphère Montréal" by Cédric THÉVENET.

https://en.wikipedia.org/wiki/Buckminster_Fuller#/media/File:BiosphÃÍre_MontrÃÍal.jpg)

A cúpula geodésica aparece também na molécula de carbono e na bola de futebol.



("C60a"uploaded by Bryn C at en.wikipedia.

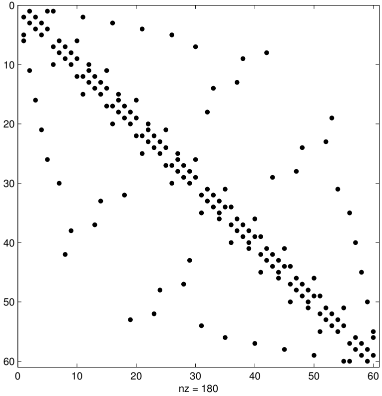
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:C60a.png#/media/File:C60a.png`)

Esta cúpula corresponde à uma forma de carbono pura com 60 átomos.

Os pontos na cúpula geodésica estão distribuídos de modo que a distância de um ponto com seus três vizinhos é a mesma.

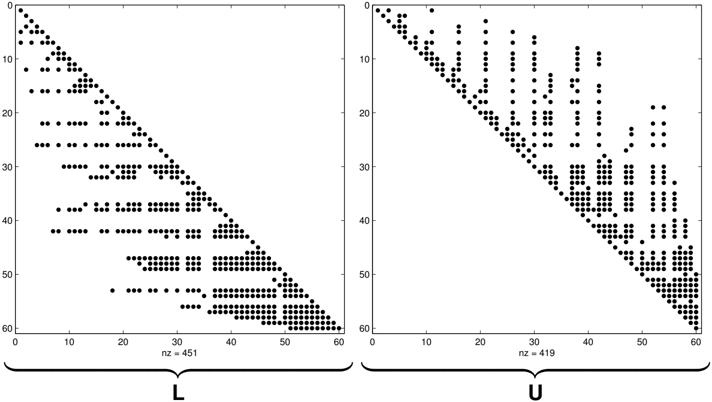
Os pontos na cúpula geodésica estão distribuídos de modo que a distância de um ponto com seus três vizinhos é a mesma.

A matriz de adjacência $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{60 \times 60}$ mostrada abaixo é simétrica e possui 3 elementos não-nulos por linha ou coluna, totalizando 180 elementos não-nulos.



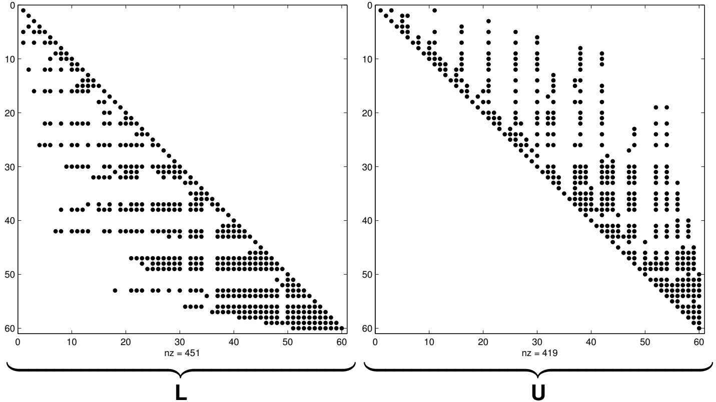

O produto $\mathbf{Bx}$ requer $5 \times 60$ operações aritméticas.

A fatoração LU de **B** fornece as matrizes mostradas abaixo:




O número total de elementos não-nulos nos fatores **L** e **U** são 451 e 419, respectivamente.

A fatoração LU de **B** fornece as matrizes mostradas abaixo:




O número total de elementos não-nulos nos fatores **L** e **U** são 451 e 419, respectivamente.

O número de operações efetuadas para determinar **L** e **U** foi aproximadamente $1.4 \times 10^5$ (fatoração LU sem adaptações).

Um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular esparsa, pode ser resolvido usando um método iterativo que efetua apenas o produto matriz-vetor $\mathbf{Ax}$.

Um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular esparsa, pode ser resolvido usando um método iterativo que efetua apenas o produto matriz-vetor $\mathbf{Ax}$.

---

Tais métodos iterativos preservam a estrutura esparsa da matriz e, portanto, efetuam menos operações e consomem menos espaço na memória.

Um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular esparsa, pode ser resolvido usando um método iterativo que efetua apenas o produto matriz-vetor $\mathbf{Ax}$.

Tais métodos iterativos preservam a estrutura esparsa da matriz e, portanto, efetuam menos operações e consomem menos espaço na memória.

Existem muitos métodos eficientes na literatura que vão além da ementa desse curso.

Um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular esparsa, pode ser resolvido usando um método iterativo que efetua apenas o produto matriz-vetor $\mathbf{Ax}$.

Tais métodos iterativos preservam a estrutura esparsa da matriz e, portanto, efetuam menos operações e consomem menos espaço na memória.

Existem muitos métodos eficientes na literatura que vão além da ementa desse curso.

Na aula de hoje, veremos o método de (Gauss-)Jacobi e Gauss-Seidel.

# Motivação para o Método de Jacobi

Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) com $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$.

# Motivação para o Método de Jacobi

Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) com $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$.

Isolando $x_i$ de cada linha, escrevemos o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

como

$$\begin{cases} x_1 = \left(b_1 - (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\right)/a_{11}, \\ x_2 = \left(b_2 - (a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n)\right)/a_{22}, \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n = \left(b_n - (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1})\right)/a_{nn}. \end{cases}$$

# Método de Jacobi

Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ para a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, o método de Jacobi define a sequência de vetores $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\geqslant 0}$ através da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})\right)/a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})\right)/a_{22}, \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right)/a_{nn}, \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \ldots$.

## Observação

Para aplicar o método de Jacobi, devemos ter $a_{ii} \neq 0$, para todo $i$.

## Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

## Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na primeira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(0)}) = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(0)}) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

## Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na segunda iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(1)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8} \end{cases}$$

## Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na terceira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{16} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(2)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{5}{8}\right) = -\frac{23}{32} \end{cases}$$

## Critério de Parada

Além do número máximo de iterações, usamos a diferença entre duas iterações consecutivas como critério de parada do método de Jacobi.

# Critério de Parada

Além do número máximo de iterações, usamos a diferença entre duas iterações consecutivas como critério de parada do método de Jacobi.

Formalmente, paramos as iterações quando a diferença relativa de duas iterações consecutivas satisfaz

$$D_r = \frac{\max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| : i = 1, \ldots, n\}}{\max\{|x_i^{(k+1)}| : i = 1, \ldots, n\}} \leqslant \tau,$$

em que $\tau > 0$ é uma certa tolerância.

# Critério de Parada

Além do número máximo de iterações, usamos a diferença entre duas iterações consecutivas como critério de parada do método de Jacobi.

Formalmente, paramos as iterações quando a diferença relativa de duas iterações consecutivas satisfaz

$$D_r = \frac{\max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| : i = 1, \ldots, n\}}{\max\{|x_i^{(k+1)}| : i = 1, \ldots, n\}} \leqslant \tau,$$

em que $\tau > 0$ é uma certa tolerância.

De forma alternativa, podemos escrever:

$$D_r = \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty} \leqslant \tau,$$

em que $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_i| : i = 1, \ldots, n\}$ é uma norma vetorial.

## Exemplo 2 (Revisado com critério de parada)

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na primeira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(0)}) = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(0)}) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\{|\frac{1}{2} - 0|, |\frac{-1}{4} - 0|\}}{\max\{|\frac{1}{2}|, |\frac{-1}{4}|\}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

## Exemplo 2 (Revisado com critério de parada)

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na segunda iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(1)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8} \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\{|\frac{5}{8} - \frac{1}{2}|, |\frac{-5}{8} - \frac{-1}{4}|\}}{\max\{|\frac{5}{8}|, |\frac{-5}{8}|\}} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}.$$

## Exemplo 2 (Revisado com critério de parada)

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na terceira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{16} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(2)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{5}{8}\right) = -\frac{23}{32} \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\{|\frac{13}{16} - \frac{5}{8}|, |\frac{-23}{32} - \frac{-5}{8}|\}}{\max\{|\frac{-23}{32}|, |\frac{-23}{32}|\}} = \frac{3/16}{23/16} = \frac{3}{23}.$$

## Exemplo 2 (Revisado com critério de parada)

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a aproximação para a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

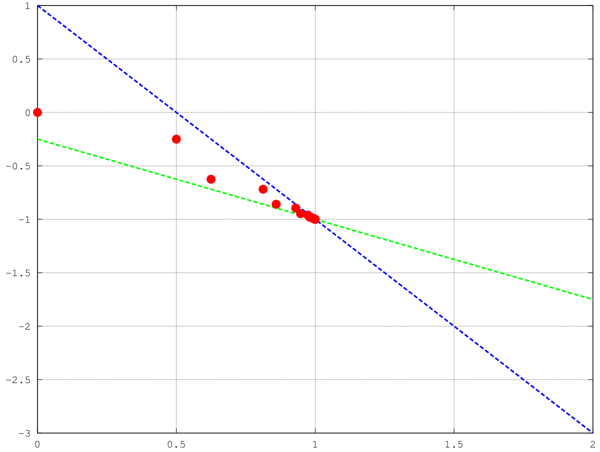
Na iteração 19, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(19)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(18)}) = 0.9999 \\ x_2^{(19)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(18)}) = -0.9999 \end{cases}$$

com

$$D_r = 7.3 \times 10^{-5}.$$

Geometricamente, o método de Jacobi produz a sequência de pontos vermelhos que convergem para $(1, -1)$.




As linhas azul e verde correspondem as duas equações do sistema linear.

# Motivação para o Método de Gauss-Seidel

Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) com $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$.

# Motivação para o Método de Gauss-Seidel

Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) com $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$.

No método de Jacobi, dado $\mathbf{x}^{(0)}$, definimos

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})\right)/a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})\right)/a_{22}, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right)/a_{nn}, \end{cases}$$

Note que $x_j^{(k+1)}$ é determinando usando $x_i^{(k)}$, para $i < j$!

# Motivação para o Método de Gauss-Seidel

Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) com $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$.

No método de Jacobi, dado $\mathbf{x}^{(0)}$, definimos

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})\right)/a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} &= \left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})\right)/a_{22}, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right)/a_{nn}, \end{cases}$$

Note que $x_j^{(k+1)}$ é determinando usando $x_i^{(k)}$, para $i < j$!

No método de Gauss-Seidel, utilizam-se os valores atualizados $x_i^{(k+1)}$, para $i < j$, no cálculo de $x_j^{(k+1)}$.

# Método de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ para a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, o método de Gauss-Seidel define $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geqslant 0}$ através da seguinte relação de recorrência para $k = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})\right)/a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})\right)/a_{22}, \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right)/a_{nn}, \end{cases}$$

# Método de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ para a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, o método de Gauss-Seidel define $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geqslant 0}$ através da seguinte relação de recorrência para $k = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})\right)/a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} &= \left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})\right)/a_{22}, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right)/a_{nn}, \end{cases}$$

Tal como no método de Jacobi, a diferença relativa

$$D_r = \frac{\max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|, i = 1, \ldots, n\}}{\max\{|x_i^{(k+1)}|, i = 1, \ldots, n\}} \leqslant \tau,$$

é usado como critério de parada com tolerância $\tau > 0$.

## Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

## Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na primeira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}, \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(1)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}, \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\{|\frac{1}{2} - 0|, |\frac{-5}{8} - 0|\}}{\max\{|\frac{1}{2}|, |\frac{-5}{8}|\}} = \frac{5/8}{5/8} = 1.$$

## Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na segunda iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{16}, \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(2)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{13}{16}\right) = -\frac{55}{64}, \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\{|\frac{13}{16} - \frac{1}{2}|, |\frac{-55}{64} - \frac{-5}{8}|\}}{\max\{|\frac{13}{16}|, |\frac{-55}{64}|\}} = \frac{5/16}{55/64} = \frac{4}{11}.$$

## Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na terceira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{55}{64}\right) = \frac{119}{128}, \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(3)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{119}{128}\right) = -\frac{485}{512}, \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\{|\frac{119}{128} - \frac{13}{16}|, |\frac{-485}{512} - \frac{-55}{64}|\}}{\max\{|\frac{119}{128}|, |\frac{-485}{512}|\}} = \frac{12}{91}.$$

## Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

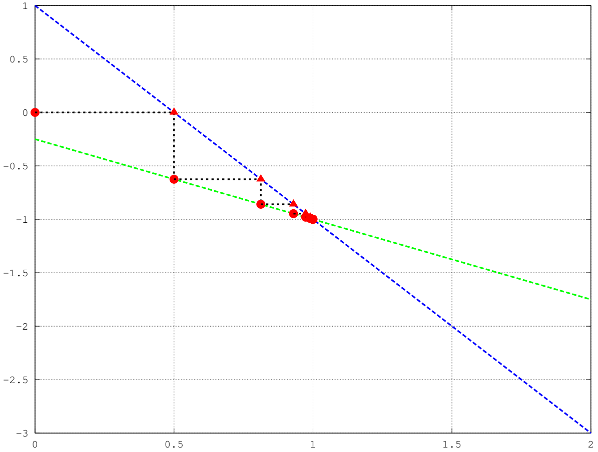
Na iteração 11, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(11)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(10)}) = 0.9999 \\ x_2^{(11)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(11)}) = -0.9999 \end{cases}$$

com

$$Dr = 4.6 \times 10^{-5}.$$

Geometricamente, o método de Gauss-Seidel produz a sequência de pontos vermelhos que convergem para $(1, -1)$.




As linhas azul e verde correspondem as duas equações do sistema linear.

# Considerações Finais

Os métodos iterativos, que geralmente não modificam significativamente a estrutura da matriz $\mathbf{A}$, possuem papel importante na resolução de sistemas lineares principalmente quando $\mathbf{A}$ é esparsa.

# Considerações Finais

Os métodos iterativos, que geralmente não modificam significativamente a estrutura da matriz $\mathbf{A}$, possuem papel importante na resolução de sistemas lineares principalmente quando $\mathbf{A}$ é esparsa.

Na aula de hoje apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel.

# Considerações Finais

Os métodos iterativos, que geralmente não modificam significativamente a estrutura da matriz $\mathbf{A}$, possuem papel importante na resolução de sistemas lineares principalmente quando $\mathbf{A}$ é esparsa.

Na aula de hoje apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel.

O método de Gauss-Seidel é, evidentemente, superior ao método de Jacobi! Contudo, o método de Jacobi pode ser interessante se implementado usando computação paralela!

# Considerações Finais

Os métodos iterativos, que geralmente não modificam significativamente a estrutura da matriz $\mathbf{A}$, possuem papel importante na resolução de sistemas lineares principalmente quando $\mathbf{A}$ é esparsa.

Na aula de hoje apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel.

O método de Gauss-Seidel é, evidentemente, superior ao método de Jacobi! Contudo, o método de Jacobi pode ser interessante se implementado usando computação paralela!

Na próxima aula discutiremos a convergência desses métodos.

Muito grato pela atenção!