MS211 - Cálculo Numérico

Aula 10 – Método do Ponto Fixo.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Nas aula anterior iniciamos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Nas aula anterior iniciamos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que

$$f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Nas aula anterior iniciamos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que

$$f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Na aula anterior, apresentamos os métodos da **bissecção** e da **posição falsa**, ambos baseados no teorema do valor intermediário.

Nas aula anterior iniciamos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que

$$f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Na aula anterior, apresentamos os métodos da **bissecção** e da **posição falsa**, ambos baseados no teorema do valor intermediário.

Na aula de hoje, apresentaremos o chamado **método do ponto fixo**.

Método do Ponto Fixo (ou Iteração Linear)

O método do ponto fixo é conceitualmente importante pois serve de base para muitos outros métodos numéricos.

Método do Ponto Fixo (ou Iteração Linear)

O método do ponto fixo é conceitualmente importante pois serve de base para muitos outros métodos numéricos.

Suponha que desejamos resolver a equação $f(x) = 0$, em que f é uma função contínua em $[a, b]$.

Método do Ponto Fixo (ou Iteração Linear)

O método do ponto fixo é conceitualmente importante pois serve de base para muitos outros métodos numéricos.

Suponha que desejamos resolver a equação $f(x) = 0$, em que f é uma função contínua em $[a, b]$.

Primeiramente, reescrevemos o problema na forma

$$x = \varphi(x), \tag{1}$$

em que φ é tal que $f(x^*) = 0$ se e somente se $x^* = \varphi(x^*)$.

Método do Ponto Fixo (ou Iteração Linear)

O método do ponto fixo é conceitualmente importante pois serve de base para muitos outros métodos numéricos.

Suponha que desejamos resolver a equação $f(x) = 0$, em que f é uma função contínua em $[a, b]$.

Primeiramente, reescrevemos o problema na forma

$$x = \varphi(x), \tag{1}$$

em que φ é tal que $f(x^*) = 0$ se e somente se $x^* = \varphi(x^*)$.

Uma solução x^* de (1) é chamada **ponto fixo** de φ.

Aproximações Sucessivas

Posteriormente, dado uma aproximação inicial $x^{(0)}$ de x^*, o método do ponto fixo define as aproximações sucessivas

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

Espera-se que $x^{(k)} \to x^*$ quando $k \to \infty$.

Aproximações Sucessivas

Posteriormente, dado uma aproximação inicial $x^{(0)}$ de x^*, o método do ponto fixo define as aproximações sucessivas

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

Espera-se que $x^{(k)} \to x^*$ quando $k \to \infty$.

Note que os sobrescritos (k) e $(k+1)$ de x denotam as iterações, para $k = 0, 1, \ldots$. Eles não representam uma potência de x!

Método do Ponto Fixo

No algoritmo abaixo, denotaremos $x = x^{(k)}$ e $\tilde{x} = x^{(k+1)}$ aproximações consecutivas para o ponto fixo de φ ou, equivalentemente, a raiz da equação $f(x) = 0$. As aproximações x e $\tilde{x}$ são atualizadas a cada iteração do método!

Método do Ponto Fixo

No algoritmo abaixo, denotaremos $x = x^{(k)}$ e $\tilde{x} = x^{(k+1)}$ aproximações consecutivas para o ponto fixo de φ ou, equivalentemente, a raiz da equação $f(x) = 0$. As aproximações x e $\tilde{x}$ são atualizadas a cada iteração do método!

Entrada: Função φ; aproximação inicial x.
Dados: Número máximo de interações k_{max}; tolerância δ.
Inicialize: $k = 0$ *e* $Er = \delta + 1$.
enquanto $k \leqslant k_{max}$ *e* $Er > \delta$ **faça**
- Atualize: $k = k + 1$.
- Avalie: $\tilde{x} = \varphi(x)$.
- Calcule: $Er = |\tilde{x} - x|$.
- Atualize: $x = \tilde{x}$.

Saída: Aproximação para a raiz $\tilde{x}$.

Exemplo 1

Considere a função $f(x) = e^x - 2x - 1$, que possui uma raiz $x^* \in [1, 2]$. Usando como aproximação inicial os valores $x^{(0)} = 1$, determine as aproximações sucessivas considerando

(a) $\varphi_1(x) = (e^x - 1)/2$.

(b) $\varphi_2(x) = \ln(2x + 1)$.

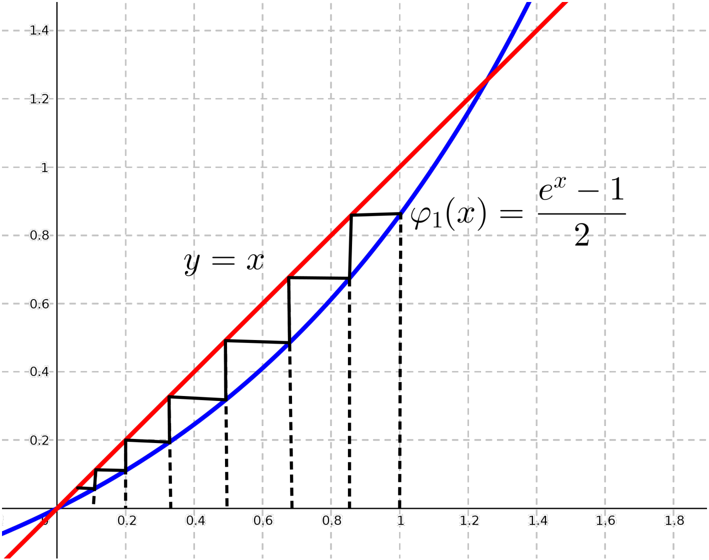
Esboce as funções φ_1 e φ_2 e os resultados obtidos.

Resposta:

Considerando a função $\varphi_1(x) = (e^x - 1)/2$ e $x^{(0)} = 1$ obtemos a sequência:

$$
\begin{array}{ll}
x^{(0)} = 1, & x^{(1)} = 0.85914, \\
x^{(2)} = 0.68057, & x^{(3)} = 0.48750, \\
x^{(4)} = 0.31412, & x^{(5)} = 0.18453, \\
x^{(6)} = 0.10132, & x^{(7)} = 0.053318, \\
x^{(8)} = 0.027382, & x^{(9)} = 0.013880, \\
x^{(10)} = 0.0069885, & x^{(11)} = 0.0035065, \\
x^{(12)} = 0.0017563, & x^{(13)} = 8.7894 \times 10^{-4}
\end{array}
$$

que converge para zero, uma raiz de f que não está no intervalo $[1,2]$. Geometricamente, temos:



1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
$y = x$
$\varphi_1(x) = \frac{e^x - 1}{2}$

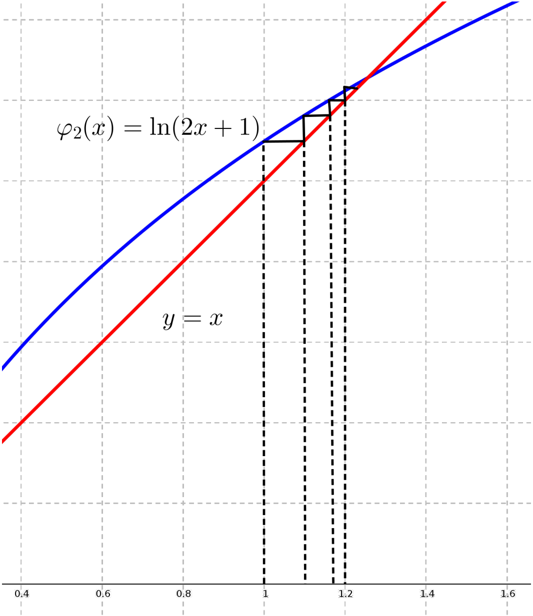
Considerando a função $\varphi_1(x) = (e^x - 1)/2$ e $x^{(0)} = 1$ obtemos a sequência:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 1, & x^{(1)} &= 1.0986, \\ x^{(2)} &= 1.1623, & x^{(3)} &= 1.2013, \\ x^{(4)} &= 1.2246, & x^{(5)} &= 1.2381, \\ x^{(6)} &= 1.2460, & x^{(7)} &= 1.2504, \\ x^{(8)} &= 1.2530, & x^{(9)} &= 1.2545, \\ x^{(10)} &= 1.2553, & x^{(11)} &= 1.2558, \\ x^{(12)} &= 1.2561, & x^{(13)} &= 1.2562 \\ x^{(14)} &= 1.2563, & x^{(15)} &= 1.2564 \\ x^{(16)} &= 1.2564. \end{aligned}$$

que converge para a raiz de f no intervalo $[1, 2]$. Com efeito,

$$f(1.2564) = -5.7124 \times 10^{-5}.$$

Geometricamente, temos:


$\varphi_2(x) = \ln(2x+1)$
$y = x$
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Convergência do Método do Ponto Fixo

O seguinte teorema fornece uma condição suficiente para a convergência do método do ponto fixo.

Teorema 2 (Teorema do Ponto Fixo)

Seja φ uma função contínua com derivada φ' contínua em um intervalo I centrado no ponto fixo x^* de φ. Se

$$|\varphi'(x)| \leqslant M < 1, \quad \forall x \in I,$$

então, para qualquer aproximação inicial $x^{(0)} \in I$, a sequência $\{x^{(k)}\}$ produzida pelo método do ponto fixo converge para x^*.

Demonstração do Teorema do Ponto Fixo

Pelo teorema do valor médio, visto em Cálculo I, temos:

$$\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*) = \varphi'(\eta)(x^{(k-1)} - x^*),$$

para algum η entre $x^{(k-1)}$ e x^*.

Demonstração do Teorema do Ponto Fixo

Pelo teorema do valor médio, visto em Cálculo I, temos:

$$\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*) = \varphi'(\eta)(x^{(k-1)} - x^*),$$

para algum η entre $x^{(k-1)}$ e x^*. Assim,

$$|x^{(k)} - x^*| = |\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\eta)||x^{(k-1)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Demonstração do Teorema do Ponto Fixo

Pelo teorema do valor médio, visto em Cálculo I, temos:

$$\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*) = \varphi'(\eta)(x^{(k-1)} - x^*),$$

para algum η entre $x^{(k-1)}$ e x^*. Assim,

$$|x^{(k)} - x^*| = |\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\eta)||x^{(k-1)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Dessa forma, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M^k |x^{(0)} - x^*|, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demonstração do Teorema do Ponto Fixo

Pelo teorema do valor médio, visto em Cálculo I, temos:

$$\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*) = \varphi'(\eta)(x^{(k-1)} - x^*),$$

para algum η entre $x^{(k-1)}$ e x^*. Assim,

$$|x^{(k)} - x^*| = |\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\eta)||x^{(k-1)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Dessa forma, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M^k |x^{(0)} - x^*|, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Lembrando que $M < 1$, concluímos que $x^{(k)} \in I$ para todo k e

$$\lim_{k \to \infty} |x^{(k)} - x^*| \leqslant \lim_{k \to \infty} M^k |x^{(0)} - x^*| = 0.$$

Taxas de Convergência

Definição 3 (Convergência Linear e Quadrática)

Seja $\{x^{(k)}\}$, com $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, uma sequência de aproximações produzida por um método numérico.

- Dizemos que $\{x^{(k)}\}$ **converge linearmente** para x^* se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = c, \quad \text{com } 0 < c < 1.$$

Taxas de Convergência

Definição 3 (Convergência Linear e Quadrática)

Seja $\{x^{(k)}\}$, com $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, uma sequência de aproximações produzida por um método numérico.

- Dizemos que $\{x^{(k)}\}$ **converge linearmente** para x^* se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = c, \quad \text{com } 0 < c < 1.$$

- Dizemos que $\{x^{(k)}\} \to x^*$ com **ordem de convergência** $p > 1$ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^p} = c, \quad \text{com } c > 0.$$

Em particular, se $p = 2$, tem-se **convergência quadrática**.

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Portanto, temos também que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = M < 1.$$

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Portanto, temos também que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = M < 1.$$

Logo, o método do ponto fixo tem convergência pelo menos linear.

Na demonstração da convergência do método do ponto fixo, concluímos que

$$|x^{(k)} - x^*| \leqslant M|x^{(k-1)} - x^*|.$$

Portanto, temos também que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} = M < 1.$$

Logo, o método do ponto fixo tem convergência pelo menos linear.

A convergência do método do ponto fixo será tanto mais rápida quanto menor for o valor de M.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método do ponto fixo no qual formulamos o problema de encontrar x^* tal que $f(x^*) = 0$ de forma equivalente como um ponto fixo, ou seja,

$$x^* = \varphi(x^*).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método do ponto fixo no qual formulamos o problema de encontrar x^* tal que $f(x^*) = 0$ de forma equivalente como um ponto fixo, ou seja,

$$x^* = \varphi(x^*).$$

No método do ponto fixo, definimos a sequência $x^{(k+1)} = \varphi\big(x^{(k)}\big)$, que converge para o ponto fixo se $|\varphi'(x)| \leqslant M < 1$.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método do ponto fixo no qual formulamos o problema de encontrar x^* tal que $f(x^*) = 0$ de forma equivalente como um ponto fixo, ou seja,

$$x^* = \varphi(x^*).$$

No método do ponto fixo, definimos a sequência $x^{(k+1)} = \varphi\big(x^{(k)}\big)$, que converge para o ponto fixo se $|\varphi'(x)| \leqslant M < 1$.

Discutimos também a convergência pelo menos linear do método do ponto fixo!

Muito grato pela atenção!