MS211 - Cálculo Numérico

Aula 09 – Zeros Reais de Funções Reais. Métodos da Bissecção e Posição Falsa

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Nas aula de hoje iniciaremos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Nas aula de hoje iniciaremos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que
$$f(x^*) = 0.$$
Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Nas aula de hoje iniciaremos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que
$$f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Devemos nos atentar para algumas questões:

- Existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$?

Nas aula de hoje iniciaremos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que

$$f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Devemos nos atentar para algumas questões:

- Existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$?
- No caso afirmativo, x^* é único?

Nas aula de hoje iniciaremos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $x^* \in [a, b]$ tal que
$$f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, x^* é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que x^* é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{x}$ a aproximação de x^* fornecida por um método numérico.

Devemos nos atentar para algumas questões:

- Existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$?
- No caso afirmativo, x^* é único?
- Se existem mais de uma solução, há um critério que estabelece qual é a melhor solução?

Existência de Solução

O seguinte teorema, geralmente visto no curso de Cálculo I, garante a existência de uma raiz de f em $[a, b]$.

Existência de Solução

O seguinte teorema, geralmente visto no curso de Cálculo I, garante a existência de uma raiz de f em $[a, b]$.

Teorema 1 (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

Existência de Solução

O seguinte teorema, geralmente visto no curso de Cálculo I, garante a existência de uma raiz de f em $[a, b]$.

Teorema 1 (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

O teorema do valor intermediário (TVI), além de garantir a existência da raiz, é a base para o chamado **método da bissecção**.

Método da Bissecção

Suponha que conhecemos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

Método da Bissecção

Suponha que conhecemos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

- Calcule o ponto médio do intervalo:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Método da Bissecção

Suponha que conhecemos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

- Calcule o ponto médio do intervalo:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

- Avalie f no ponto médio, ou seja, calcule $f(m)$.

Método da Bissecção

Suponha que conhecemos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

- Calcule o ponto médio do intervalo:

$$m = \frac{a + b}{2}.$$

- Avalie f no ponto médio, ou seja, calcule $f(m)$.
- Substitua a ou b por m de modo a obter um novo intervalo que contém a raiz, ou seja,
    - **Se** $f(m)f(b) < 0$, **então** $a \leftarrow m$, **senão** $b \leftarrow m$.

Método da Bissecção

Suponha que conhecemos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

- Calcule o ponto médio do intervalo:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

- Avalie f no ponto médio, ou seja, calcule $f(m)$.
- Substitua a ou b por m de modo a obter um novo intervalo que contém a raiz, ou seja,
  - **Se** $f(m)f(b) < 0$, **então** $a \leftarrow m$, **senão** $b \leftarrow m$.

Repetimos até obter um intervalo suficientemente pequeno, ou seja, até obtermos $(b - a) \leqslant 2\delta$!

Método da Bissecção

Suponha que conhecemos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

- Calcule o ponto médio do intervalo:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

- Avalie f no ponto médio, ou seja, calcule $f(m)$.
- Substitua a ou b por m de modo a obter um novo intervalo que contém a raiz, ou seja,
  - **Se** $f(m)f(b) < 0$, **então** $a \leftarrow m$, **senão** $b \leftarrow m$.

Repetimos até obter um intervalo suficientemente pequeno, ou seja, até obtermos $(b - a) \leqslant 2\delta$!

Tomamos o ponto médio como estimativa da raiz de f.

Método da Bissecção

Entrada: Função f; intervalo que contém a raiz $[a, b]$.
Dados: Tolerância δ.
Inicialize: $f_a = f(a)$ *e* $f_b = f(b)$.
enquanto $b - a > 2\delta$ **faça**
    Calcule: $m = \dfrac{a+b}{2}$.
    Avalie: $f_m = f(m)$.
    se $sign(f_a)sign(f_m) < 0$ **então**
        Defina $b = m$ e $f_b = f_m$.
    senão
        Defina $a = m$ e $f_a = f_m$.

Saída: Aproximação para a raiz: $\tilde{x} = \dfrac{a+b}{2}$

Para evitar *overflow* ou *underflow*, usou-se $\text{sign}(f_a)\text{sign}(f_m) < 0$ no lugar do produto $f_a f_b < 0$.

Taxa de Convergência

A taxa de convergência de um método numérico refere-se ao quão rápido ele fornece uma estimativa para a raiz de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Taxa de Convergência

A taxa de convergência de um método numérico refere-se ao quão rápido ele fornece uma estimativa para a raiz de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

No caso do método da bissecção, a cada iteração dividimos o intervalo inicial pela metade.

Taxa de Convergência

A taxa de convergência de um método numérico refere-se ao quão rápido ele fornece uma estimativa para a raiz de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

No caso do método da bissecção, a cada iteração dividimos o intervalo inicial pela metade.

Após k iterações, teremos um intervalo de tamanho $\frac{b-a}{2^k}$, que converge para zero quando $k \to \infty$.

Taxa de Convergência

A taxa de convergência de um método numérico refere-se ao quão rápido ele fornece uma estimativa para a raiz de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

No caso do método da bissecção, a cada iteração dividimos o intervalo inicial pela metade.

Após k iterações, teremos um intervalo de tamanho $\frac{b-a}{2^k}$, que converge para zero quando $k \to \infty$.

Teremos $b - a \leqslant 2\delta$ quando

$$k \geqslant \log_2 \left(\frac{|b-a|}{\delta} \right) - 1.$$

Nesse caso, o erro absoluto da aproximação satisfaz $|\tilde{x} - x^*| \leqslant \delta$.

Exemplo 2

Use o método da bissecção para encontrar uma estimativa para a raiz **positiva** da função

$$f(x) = e^x - 2x - 1,$$

com tolerância $\delta = 10^{-1}$.

Resposta:
Primeiramente, observe que

$$f(1) = e - 3 = -0.28172 \quad \text{e} \quad f(2) = e^2 - 5 = 2.3891.$$

Resposta:

Primeiramente, observe que

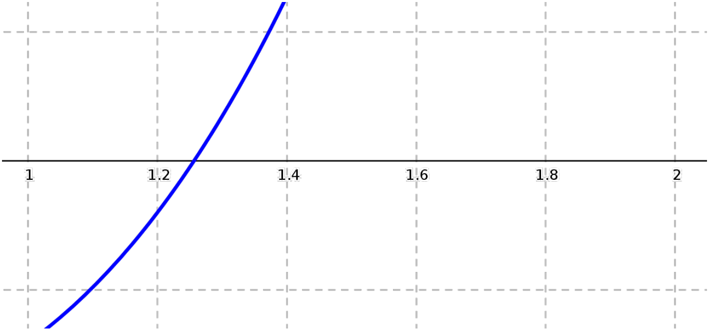
$$f(1) = e - 3 = -0.28172 \quad \text{e} \quad f(2) = e^2 - 5 = 2.3891.$$

Pelo teorema do valor intermediário, existe uma raiz entre 1 e 2.

Resposta:
Primeiramente, observe que

$$f(1) = e - 3 = -0.28172 \quad \text{e} \quad f(2) = e^2 - 5 = 2.3891.$$

Pelo teorema do valor intermediário, existe uma raiz entre 1 e 2. Vamos aplicar o método da bissecção considerando $a = 1$ e $b = 2$.



Inicializamos $f_a = f(a) = -0.28172$ e $f_b = f(b) = 2.3891$.

Inicializamos $f_a = f(a) = -0.28172$ e $f_b = f(b) = 2.3891$.

Primeira iteração:

Inicializamos $f_a = f(a) = -0.28172$ e $f_b = f(b) = 2.3891$.

Primeira iteração:
Como $b - a = 1 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$m = (a+b)/2 = 3/2 = 1.5.$$
$$f_m = 0.48169.$$

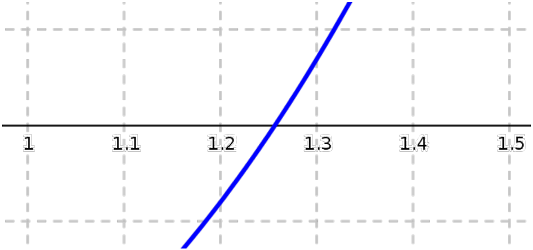
Inicializamos $f_a = f(a) = -0.28172$ e $f_b = f(b) = 2.3891$.

Primeira iteração:
Como $b - a = 1 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$m = (a+b)/2 = 3/2 = 1.5.$$
$$f_m = 0.48169.$$

Como $f_a f_m < 0$, definimos

$$b = m \quad \text{e} \quad f_b = f_m$$



Segunda iteração:

Segunda iteração:

Como $b - a = 0.5 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$m = (a + b)/2 = 1.25.$$
$$f_m = -0.0096570.$$

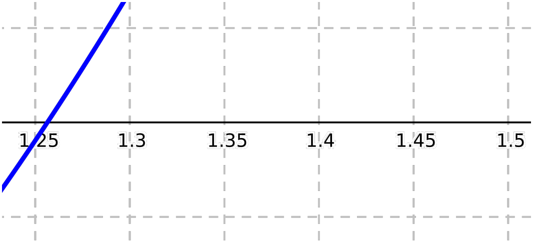
Segunda iteração:

Como $b - a = 0.5 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$m = (a + b)/2 = 1.25.$$
$$f_m = -0.0096570.$$

Como $f_a f_m > 0$, definimos

$$a = m \quad \text{e} \quad f_a = f_m$$



Note que $|f_m| = 0.00965$, um valor que poderia ser usado como critério de parada!

Terceira iteração:

Terceira iteração:

Como $b - a = 0.25 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$
\begin{aligned}
m &= (a+b)/2 = 1.375. \\
f_m &= 0.20508.
\end{aligned}
$$

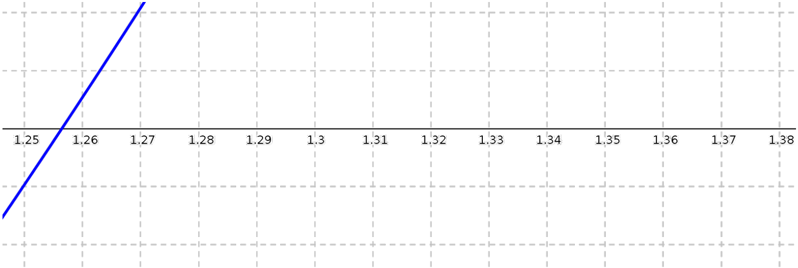
Terceira iteração:

Como $b - a = 0.25 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$m = (a+b)/2 = 1.375.$$
$$f_m = 0.20508.$$

Como $f_a f_m < 0$, definimos

$$b = m \quad \text{e} \quad f_b = f_m$$



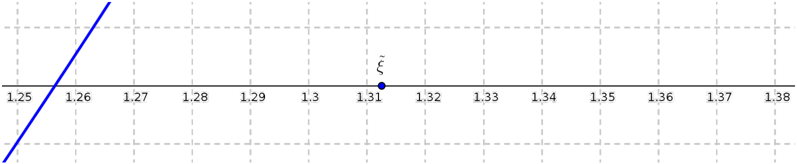
Quarta iteração:

Quarta iteração:

Como $b - a = 0.125 < 0.2 = 2\delta$, terminamos as iterações.
Definimos

$$\tilde{x} = \frac{b+a}{2} = 1.3125,$$

como sendo a aproximação para a raiz de f.



Note que $|f(\tilde{x})| = 0.090451$. Na segunda iteração, porém, encontramos $|f_m| = 0.0965$. Assim, m da segunda iteração (aparentemente) é uma aproximação melhor para a raiz.

Método da Bissecção (segunda versão)

Entrada: Função f; intervalo que contém a raiz $[a, b]$.
Dados: Tolerâncias δ e ϵ.
Inicialize: $f_a = f(a)$, $f_b = f(b)$ *e* $f_m = \epsilon + 1$.
enquanto $|f_m| > \epsilon$ e $b - a > 2\delta$ **faça**

    Calcule: $m = \dfrac{a+b}{2}$.
    Avalie: $f_m = f(m)$.
    se $sign(f_a)sign(f_m) < 0$ **então**
        Defina $b = m$ e $f_b = f_m$.
    senão
        Defina $a = m$ e $f_a = f_m$.

Saída: Aproximação para a raiz: $\tilde{x} = \begin{cases} m, & |f_m| \leqslant \epsilon, \\ \frac{a+b}{2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Método da Posição Falsa (Regula Falsi)

- Para o método da bissecção, importa apenas o sinal de f nos extremos dos intervalos.

Método da Posição Falsa (Regula Falsi)

- Para o método da bissecção, importa apenas o sinal de f nos extremos dos intervalos.
- Um método mais elaborado, deve olhar para os valores de f!

Método da Posição Falsa (Regula Falsi)

- Para o método da bissecção, importa apenas o sinal de f nos extremos dos intervalos.
- Um método mais elaborado, deve olhar para os valores de f!

Por exemplo, espera-se que a raiz de f esteja mais próxima de a que de b se $|f(a)| < |f(b)|$.

Método da Posição Falsa (Regula Falsi)

- Para o método da bissecção, importa apenas o sinal de f nos extremos dos intervalos.
- Um método mais elaborado, deve olhar para os valores de f!

Por exemplo, espera-se que a raiz de f esteja mais próxima de a que de b se $|f(a)| < |f(b)|$.

No método da posição falsa, em vez de escolher o ponto médio do intervalo, adotamos a intersecção do eixo x com a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Método da Posição Falsa (Regula Falsi)

- Para o método da bissecção, importa apenas o sinal de f nos extremos dos intervalos.
- Um método mais elaborado, deve olhar para os valores de f!

Por exemplo, espera-se que a raiz de f esteja mais próxima de a que de b se $|f(a)| < |f(b)|$.

No método da posição falsa, em vez de escolher o ponto médio do intervalo, adotamos a intersecção do eixo x com a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Formalmente, substituímos o ponto médio do intervalo por

$$m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Para evitar erros de cancelamento, podemos calcular m de forma alternativa usando a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
m = & \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \\
= & \frac{af(b) - bf(b) + bf(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \\
= & \frac{(a - b)f(b) + b(f(b) - f(a))}{f(b) - f(a)} \\
= & b - f(b)\frac{(b - a)}{f(b) - f(a)}
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
m = b - \frac{f(b)}{d}, \quad \text{com} \quad d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.
$$

Método da Posição Falsa

Entrada: Função f; intervalo que contém a raiz $[a, b]$.
Dados: Tolerâncias δ e ϵ.
Inicialize: $f_a = f(a)$, $f_b = f(b)$ e $f_m = \epsilon + 1$.
enquanto $|f_m| > \epsilon$ e $b - a > 2\delta$ **faça**

- Calcule: $d = \dfrac{f_b - f_a}{b - a}$
- Defina: $m = b - \dfrac{f_b}{d}$.
- Avalie: $f_m = f(m)$.
- **se** $sign(f_a)sign(f_m) < 0$ **então**
  - Defina $b = m$ e $f_b = f_m$.
- **senão**
  - Defina $a = m$ e $f_a = f_m$.

Saída: Aproximação para a raiz: $\tilde{x} = \begin{cases} m, & |f_m| \leqslant \epsilon, \\ \frac{af_b - bf_a}{f_b - f_a}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Exemplo 3

Use o método da posição falsa para encontrar uma estimativa para a raiz **positiva** da função

$$f(x) = e^x - 2x - 1,$$

com tolerâncias $\delta = 0.1$ e $\epsilon = 0.1$.

Resposta: Primeiramente, observe que

$$f(1) = e - 3 = -0.28172$$

e

$$f(2) = e^2 - 5 = 2.3891.$$

Resposta: Primeiramente, observe que

$$f(1) = e - 3 = -0.28172$$

e

$$f(2) = e^2 - 5 = 2.3891.$$

Pelo teorema do valor intermediário, existe uma raiz entre 1 e 2.

Resposta: Primeiramente, observe que

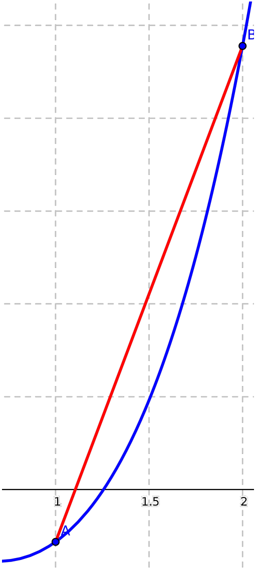
$$f(1) = e - 3 = -0.28172$$

e

$$f(2) = e^2 - 5 = 2.3891.$$

Pelo teorema do valor intermediário, existe uma raiz entre 1 e 2.

Vamos aplicar o método da posição falsa com $a = 1$ e $b = 2$.



Inicializamos

$$f_a = f(a) = -0.28172$$

e

$$f_b = f(b) = 2.3891.$$

Inicializamos

$$f_a = f(a) = -0.28172$$

e

$$f_b = f(b) = 2.3891.$$

Primeira iteração:
Como $b - a = 1 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$\begin{aligned} m =& 1.1055. \\ f_m =& -0.19028. \end{aligned}$$

Inicializamos

$$f_a = f(a) = -0.28172$$

e

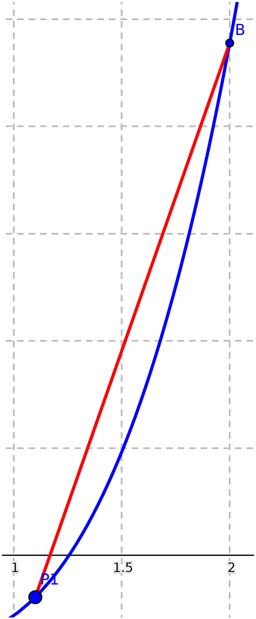
$$f_b = f(b) = 2.3891.$$

Primeira iteração:
Como $b - a = 1 > 0.2 = 2\delta$, calculamos:

$$m = 1.1055.$$
$$f_m = -0.19028.$$

Como $f_a f_m > 0$, definimos

$$a = m \quad \text{e} \quad f_a = f_m$$



Segunda iteração:
Como

$$b - a = 0.89452 > 0.2 = 2\delta,$$

e

$$|f_m| = 0.19028 > 0.1 = \epsilon,$$

calculamos:

$$\begin{aligned} m &= 1.1715. \\ f_m &= -0.11620. \end{aligned}$$

Segunda iteração:
Como

$$b - a = 0.89452 > 0.2 = 2\delta,$$

e

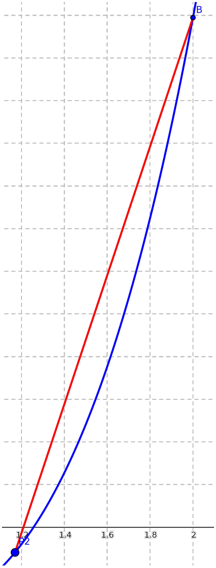
$$|f_m| = 0.19028 > 0.1 = \epsilon,$$

calculamos:

$$m = 1.1715.$$
$$f_m = -0.11620.$$

Como $f_a f_m > 0$, definimos

$$a = m \quad \text{e} \quad f_a = f_m$$



Terceira iteração:
Como

$$b - a = 0.82853 > 0.2 = 2\delta,$$

e

$$|f_m| = 0.11620 > 0.1 = \epsilon,$$

calculamos:

$$m = 1.2099.$$
$$f_m = -0.066646.$$

Terceira iteração:
Como

$$b - a = 0.82853 > 0.2 = 2\delta,$$

e

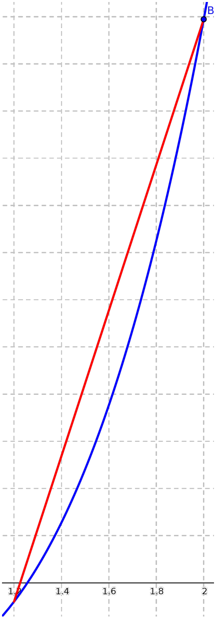
$$|f_m| = 0.11620 > 0.1 = \epsilon,$$

calculamos:

$$m = 1.2099.$$
$$f_m = -0.066646.$$

Como $f_a f_m > 0$, definimos

$$a = m \quad \text{e} \quad f_a = f_m$$



Quarta iteração:
Como

$$b - a = 0.79010 > 0.2 = 2\delta,$$

mas

$$|f_m| = 0.066646 < 0.1 = \epsilon,$$

terminamos as interações.

Quarta iteração:
Como

$$b - a = 0.79010 > 0.2 = 2\delta,$$

mas

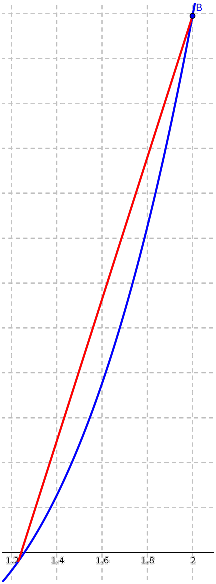
$$|f_m| = 0.066646 < 0.1 = \epsilon,$$

terminamos as interações.
A aproximação para a raiz é

$$\tilde{x} = 1.2099,$$

e

$$f(\tilde{x}) = -0.066646.$$



Considerações Finais

Na aula de hoje iniciamos o estudo dos métodos numéricos para aproximar a raiz real x^* de uma função real f, isto é,

$$f(x^*) = 0.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje iniciamos o estudo dos métodos numéricos para aproximar a raiz real x^* de uma função real f, isto é,

$$f(x^*) = 0.$$

Baseado no teorema do valor intermediário, apresentamos os métodos da bissecção e da posição falsa.

Considerações Finais

Na aula de hoje iniciamos o estudo dos métodos numéricos para aproximar a raiz real x^* de uma função real f, isto é,

$$f(x^*) = 0.$$

Baseado no teorema do valor intermediário, apresentamos os métodos da bissecção e da posição falsa.

Em termos gerais, ambos os métodos trabalham com um intervalo fechado que contém a raiz. O intervalo é dividido pela metade a cada iteração do método da bissecção. No método da posição falsa, o intervalo é dividido usando a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Muito grato pela atenção!