MS211 - Cálculo Numérico

Aula 8 – Formulação Matricial e Convergência dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução de um sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) tal que $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução de um sistema linear

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) tal que $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Na aula de hoje discutiremos a convergência desses métodos.

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução de um sistema linear

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) tal que $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Na aula de hoje discutiremos a convergência desses métodos.

Para tanto, apresentaremos uma formulação matricial para esses dois métodos iterativos.

Método de Jacobi

Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ para a solução do sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o método de Jacobi define a sequência de vetores $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\geqslant 0}$ através da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})\right)/a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})\right)/a_{22}, \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right)/a_{nn}, \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \ldots$.

A relação de recorrência, porém, pode ser escrita como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} &= b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)}), \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)}), \\ \quad\vdots & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}). \end{cases}$$

A relação de recorrência, porém, pode ser escrita como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} &= b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)}), \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)}), \\ \quad\vdots & \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}). \end{cases}$$

Usando uma notação matricial, temos

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)},$$

em que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Forma Matricial do Método de Jacobi

Portanto, podemos escrever o método de Jacobi na forma matricial:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}) \quad k = 0, 1, \ldots,$$

em que

$$\mathbf{D} = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é a matriz diagonal com os elementos a_{ii} e

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Método de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ para a solução do sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o método de Gauss-Seidel define $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geqslant 0}$ através da seguinte relação de recorrência para $k = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})\right)/a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})\right)/a_{22}, \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right)/a_{nn}. \end{cases}$$

Colocando os termos $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$ do lado esquerdo das equações, temos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} & = b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)}), \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} & = b_2 - (a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)}), \\ \quad \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{i1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{ii}x_i^{(k+1)} & = b_i - (a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} + \ldots + a_{in}x_n^{(k)}), \\ \quad \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k+1)} & = b_n. \end{cases}$$

Colocando os termos $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$ do lado esquerdo das equações, temos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} & = b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)}), \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} & = b_2 - (a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)}), \\ \quad \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{i1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{ii}x_i^{(k+1)} & = b_i - (a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} + \ldots + a_{in}x_n^{(k)}), \\ \quad \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k+1)} & = b_n. \end{cases}$$

Equivalentemente, temos $\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}$ para $k = 0, 1, \ldots$, com

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Forma Matricial do Método de Gauss-Seidel

Podemos escrever o método de Gauss-Seidel na forma matricial:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}) \quad k = 0, 1, \ldots,$$

em que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior e

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

é triangular superior.

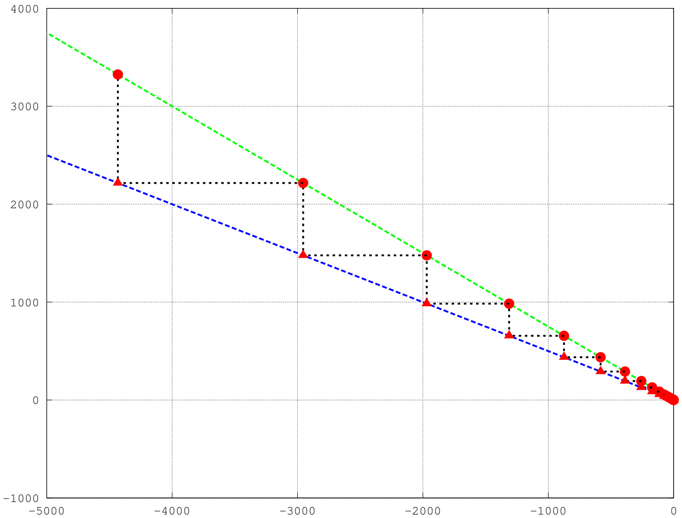
Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel não convergem sempre para a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Exemplo 1

Ambos os métodos divergem quando aplicados para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Com efeito, as 20 primeiras iterações do método de Gauss-Seidel, com $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$, corresponde à sequência de pontos vermelhos mostrados na figura abaixo:



Convergência dos Métodos Iterativos

Ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ser escritos na forma matricial como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$$

em que $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$ se, e somente se, $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Convergência dos Métodos Iterativos

Ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ser escritos na forma matricial como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$$

em que $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$ se, e somente se, $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

No método de Jacobi, temos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}) = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}}_{\mathbf{C}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}.$$

Convergência dos Métodos Iterativos

Ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ser escritos na forma matricial como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$$

em que $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$ se, e somente se, $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

No método de Jacobi, temos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}) = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}}_{\mathbf{C}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}.$$

No método de Gauss-Seidel, temos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}) = \underbrace{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}}_{\mathbf{C}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}.$$

A diferença entre duas iterações consecutivas do método $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, $k \geqslant 1$, satisfaz

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}\right) - \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}\right) = \mathbf{C}\big(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\big).$$

A diferença entre duas iterações consecutivas do método $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, $k \geqslant 1$, satisfaz

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}\right) - \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}\right) = \mathbf{C}\big(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\big).$$

Vamos denotar $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$. Assim, temos

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)}, \quad k \geqslant 0.$$

A diferença entre duas iterações consecutivas do método $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, $k \geqslant 1$, satisfaz

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}\right) - \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}\right) = \mathbf{C}\big(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\big).$$

Vamos denotar $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$. Assim, temos

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)}, \quad k \geqslant 0.$$

Note que a sequência $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots$ converge se

$$D^{(k+1)} = \max_{i=1,\ldots,n}\{|d_i^{(k+1)}|\} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Pela desigualdade triangular, a i-ésima componente de $\mathbf{d}^{(k+1)}$, que é igual à $\mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)}$, satisfaz

$$\left|d_i^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} c_{ij} d_j^{(k)}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}||d_j^{(k)}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Portanto, tomando $D^{(k)} = \max_{i=1,\ldots,n}\{|d_i^{(k)}|\}$, temos

$$\begin{aligned} D^{(k+1)} = \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\left|d_i^{(k+1)}\right|\right\} &\leqslant \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}||d_j^{(k)}|\right\} \\ &\leqslant \left[\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\right\}\right] D^{(k)}, \end{aligned}$$

pois $|d_j^{(k)}| \leqslant D^{(k)}$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Tomando
$$\gamma = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \right\},$$
e aplicando k-vezes a inequação, concluímos que
$$D^{(k+1)} \leqslant \gamma D^{(k)} \leqslant \gamma^2 D^{(k-1)} \leqslant \ldots \leqslant \gamma^k D^{(1)}.$$

Tomando

$$\gamma = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \right\},$$

e aplicando k-vezes a inequação, concluímos que

$$D^{(k+1)} \leqslant \gamma D^{(k)} \leqslant \gamma^2 D^{(k-1)} \leqslant \ldots \leqslant \gamma^k D^{(1)}.$$

Concluindo, se

$$\gamma = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \right\} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1, \forall i = 1, \ldots, n,$$

então

$$D^{(k+1)} = \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|\} \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty,$$

ou seja, o método iterativo converge!

Critério de Convergência

O seguinte teorema estabelece um critério de convergência para os métodos iterativos (incluindo Jacobi e Gauss-Seidel) definidos pela equação

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k \geqslant 0,$$

independentemente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

Teorema 2 (Critério de Convergência)

A sequência

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

converge para $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$ *se*

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

No método de Jacobi, temos

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

No método de Jacobi, temos

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, garantimos a convergência do método se

$$\sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

No método de Jacobi, temos

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, garantimos a convergência do método se

$$\sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Em palavras, o método de Jacobi converge se a matriz **A** é diagonalmente estritamente dominante.

Definição 3 (Matriz com Diagonal Estritamente Dominante)

Dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma **matriz diagonalmente estritamente dominante** se

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 4

Determine quais matrizes são diagonalmente estritamente dominante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 3 (Matriz com Diagonal Estritamente Dominante)

Dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma **matriz diagonalmente estritamente dominante** se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 4

Determine quais matrizes são diagonalmente estritamente dominante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resposta: Somente **B** é diagonalmente estritamente dominante.

Critério das Linhas

Pode-se mostrar que, se **A** é diagonalmente estritamente dominante, então o método de Gauss-Seidel também converge.

Teorema 5 (Critério das Linhas)

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*. Se a matriz* **A** *é diagonalmente estritamente dominante, ou seja,*

$$\alpha_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

então ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel geram uma sequência que converge para a solução do sistema linear independentemente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$*.*

Critério de Sassenfeld

Analogamente, considerando a matriz $\mathbf{C} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}$, encontramos a seguinte condição suficiente para a convergência do método de Gauss-Seidel:

Teorema 6 (Critério de Sassenfeld)

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. *Se*

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *que converge para a solução do sistema linear independentemente da aproximação inicial* $\mathbf{x}^{(0)}$.

Exemplo 7

Verifique se o critério das linhas é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Exemplo 7

Verifique se o critério das linhas é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Resposta: No critério das linhas, determinamos

$$\alpha_1 = \frac{1}{|a_{11}|}(|a_{12}| + |a_{13}|) = \frac{1}{3}(0+1) = \frac{1}{3} < 1, \qquad \checkmark$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{|a_{22}|}(|a_{21}| + |a_{23}|) = \frac{1}{1}(1+0) = 1 \not< 1.$$

Logo, o critério das linhas não vale para esse sistema linear! Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ou não convergir nesse caso!

Exemplo 8

Verifique se o critério de Sassenfeld é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Exemplo 8

Verifique se o critério de Sassenfeld é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Resposta: No critério de Sassenfeld, determinamos

$$\beta_1 = \frac{1}{|a_{11}|}(|a_{12}| + |a_{13}|) = \frac{1}{3}(0+1) = \frac{1}{3} < 1, \qquad \checkmark$$

$$\beta_2 = \frac{1}{|a_{22}|}(|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}|) = \frac{1}{1}(1\frac{1}{3} + 0) = \frac{1}{3} < 1, \qquad \checkmark$$

$$\beta_3 = \frac{1}{|a_{33}|}(|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2) = \frac{1}{2}(3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} < 1, \qquad \checkmark$$

Logo, o critério de Sassenfeld é satisfeito!
O método de Gauss-Seidel certamente converge nesse caso.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos uma formulação matricial para os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos uma formulação matricial para os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Posteriormente, discutimos critérios de convergência para os dois métodos!

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos uma formulação matricial para os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Posteriormente, discutimos critérios de convergência para os dois métodos!

Destacamos os critérios apresentados são condições suficientes, mas não necessária, para a convergência. Em outras palavras, o método converge se o critério for satisfeito. Nada podemos dizer sobre a convergência se o critério não for satisfeito.

Muito grato pela atenção!