MS211 - Cálculo Numérico

Aula 03 – Método da Eliminação de Gauss.

Marcos Eduardo Valle
Matemática Aplicada
IMECC - Unicamp

BY NC SA

Introdução

Na aula de hoje estudaremos o **método da Eliminação de Gauss** para resolução de sistemas lineares.

Um sistema linear com n equações e n incógnitas pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Sistemas lineares estão entre os mais importantes problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais.

Exemplo Simples

Ilustraremos o método da eliminação de Gauss para resolver sistemas lineares com um exemplo simples.

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2, & (\ell_1^{(0)}) \\ 4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3, & (\ell_2^{(0)}) \\ 8x_1 & +7x_2 & +9x_3 & +5x_4 & = 1, & (\ell_3^{(0)}) \\ 6x_1 & +7x_2 & +9x_3 & +8x_4 & = -4, & (\ell_4^{(0)}) \end{cases}$$

em que x_1, x_2, x_3, e x_4 denotam as incógnidas, ou seja, os valores que desejamos calcular.

Podemos resolver o sistema adicionando/subtraindo de uma linha um múltiplo de outra linha.

Método da Eliminação de Gauss

Existem várias formas resolver um sistema linear adicionando/subtraindo de uma linha um múltiplo de outra.

Descreveremos a seguir o chamado **método da eliminação de Gauss**.

Primeiro, adicionamos a segunda, terceira e quarta equações, múltiplos da primeira equação:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2, & \\ & 2x_2 & +x_3 & +x_4 & = -1, & (\ell_2^{(1)} \leftarrow \ell_2^{(0)} - \frac{4}{2}\ell_1^{(0)}) \\ & 3x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = -7, & (\ell_3^{(1)} \leftarrow \ell_3^{(0)} - \frac{8}{2}\ell_1^{(0)}) \\ & 4x_2 & +6x_3 & +8x_4 & = -10, & (\ell_4^{(1)} \leftarrow \ell_4^{(0)} - \frac{6}{2}\ell_1^{(0)}) \end{cases}$$

Os múltiplos são escolhidos de modo a *eliminar* o termo x_1 da segunda, terceira e quarta equações.

Posteriormente, adicionamos a terceira e quarta equações, múltiplos da segunda equação:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2, \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & = -1, \\ & & 2x_3 & +2x_4 & = -4, & (\ell_3^{(2)} \leftarrow \ell_3^{(1)} - \frac{3}{1}\ell_2^{(1)}) \\ & & 2x_3 & +4x_4 & = -6, & (\ell_4^{(2)} \leftarrow \ell_4^{(1)} - \frac{4}{1}\ell_2^{(1)}) \end{cases}$$

Os múltiplos são escolhidos de modo a *eliminar* o termo x_2 da terceira e quarta equações.

No terceiro estágio do método da eliminação de Gauss, adicionamos a quarta equação um múltiplo da terceira:

$$
\begin{cases}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 1, \\
 & x_2 & +x_3 & +x_4 & = -1, \\
 & & 2x_3 & +2x_4 & = -4, \\
 & & & 2x_4 & = -2, \quad (\ell_4^{(3)} \leftarrow \ell_4^{(2)} - \frac{2}{2}\ell_3^{(2)})
\end{cases}
$$

O múltiplo é escolhido de modo a *eliminar* o termo x_3 da quarta equação.

Finalmente, determinamos a solução do sistema linear usando a chamada **substituição regressiva** (ou **regressa**).

Especificamente, da quarta equação, concluímos que

$$x_4 = \frac{-2}{2} = -1.$$

Substituindo o valor de x_4 na terceira equação, obtemos:

$$x_3 = \frac{-4 - 2x_4}{2} = \frac{-4 - 2 \times (-1)}{2} = -1.$$

Analogamente, obtemos

$$x_2 = \frac{-1 - x_3 - x_4}{1} = 1,$$

e

$$x_1 = \frac{1 - x_2 - x_3}{1} = 1.$$

Concluindo, a solução do sistema linear é

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1 \quad \text{e} \quad x_4 = -1.$$

Este é um exemplo simples com 4 equações e 4 incógnitas. Porém, é comum encontrarmos sistemas envolvendo muito mais equações e incógnitas!

Nesse caso, precisamos implementar o método da eliminação de Gauss para resolver de forma eficiente um sistema linear com um número significativo de equações e incógnitas.

Notação Matricial

Para facilitar a exposição, identificamos o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

com a equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Se um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ não tem solução, diremos que ele é *inconsistente*.

Dizemos que um sistema linear é *consistente* se ele possui pelo menos uma solução.

Um sistema linear consistente pode ter ou *uma única solução* ou *infinitas soluções*.

O conjunto de todas as soluções de um sistema linear é chamado *conjunto solução*.

Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes se possuem o mesmo conjunto solução.

O método da eliminação de Gauss é utilizado para resolver um sistema linear consistente e que admite uma única solução.

No método da eliminação de Gauss, um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é transformado num sistema linear equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, que pode ser resolvido facilmente usando a *substituição regressiva* ou *reversa*.

Para transformar $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, efetuamos as operações:

Operações Elementares

- Permutar duas equações.
- Multiplicar uma equação por uma constante não-nula.
- Adicionar (ou subtrair) um múltiplo de uma equação à outra.

Operações elementares não afetam a solução do sistema, ou seja, os sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ possuem a mesma solução!

Sistema Triangular Superior

Se $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz triangular superior não-singular, i.e,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

com $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, então a solução de $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ é determinada usando a *substituição regressiva* (do inglês *back substitution*). Formalmente, tem-se

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right), \quad \text{para } i = n, n-1, \dots, 1.$$

Algoritmo da Substituição Regressiva

Entrada: Matriz triangular superior não-singular $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e vetor coluna $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

- Inicialize $\mathbf{x} =$ cópia de $\mathbf{c}$.

para $i = n$ *até* 1 **faça**

  para $j = i + 1$ *até* n **faça**

   - $x_i = x_i - u_{ij} x_j$.

  fim

  - $x_i = x_i / uii$.

fim

Saída: $\mathbf{x}$ (solução do sistema linear $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$).

No algoritmo acima, as componentes abaixo da diagonal principal de $\mathbf{U}$ são completamente ignoradas.

Exemplo 1

Resolva o sistema triangular superior $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Resposta: A solução do sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, que resolvemos anteriormente usando a substituição regressiva, é

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Método da Eliminação de Gauss

No método da Eliminação de Gauss, aplicamos operações elementares em $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de modo a obter um sistema equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior.

Denotaremos por $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ a matriz $\mathbf{A}$ concatenada com o vetor $\mathbf{b}$.

Inicialmente, escrevemos $[\mathbf{A}^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}] = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

A cada estágio $j = 0, 1, \ldots, n-1$, operações elementares são aplicadas no par $[\mathbf{A}^{(j)}|\mathbf{b}^{(j)}]$ para obter um novo par $[\mathbf{A}^{(j+1)}|\mathbf{b}^{(j+1)}]$ com zeros abaixo do elemento $a_{jj}^{(j)}$.

No primeiro estágio, introduzimos zeros abaixo de $a_{11}^{(0)}$ subtraindo da j-ésima linha um múltiplo m_{i1} da primeira linha.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \ldots & a_{1n}^{(0)} & | & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \ldots & a_{2n}^{(0)} & | & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \ldots & a_{nn}^{(0)} & | & b_n^{(0)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Formalmente, para $i, k = 2, \ldots, n$, definimos

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)} \quad \text{e} \quad a_{ik}^{(1)} = a_{ik}^{(0)} - m_{i1} a_{1k}^{(0)}.$$

No j-ésimo estágio, introduzimos zeros abaixo de $a_{jj}^{(j)}$, ou seja,

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} - m_{ij} b_j^{(j-1)} \quad \text{e} \quad a_{ik}^{(j)} = a_{ik}^{(j-1)} - m_{ij} a_{jk}^{(j-1)},$$

para $i = j+1, \ldots, n$ e $k = j+1, \ldots, n$.

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para determinar a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Resposta: Primeiramente, definimos

$$[\mathbf{A}^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -4 \end{array}\right]$$

No primeiro estágio do método da eliminação de Gauss, calculamos os multiplicadores

$$m_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad m_{31} = 4 \quad \text{e} \quad m_{41} = 3.$$

Note que $b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - m_{21} b_1^{(0)} = 3 - (2)(3) = -1$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2^{(1)} &= \mathbf{a}_2^{(0)} - m_{21}\mathbf{a}_1^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente, $b_3^{(1)} = b_3(0) - m_{13} b_1^{(0)} = -7,$

$$b_4^{(1)} = b_4(0) - m_{14} b_1^{(0)} = -10,$$

$$\mathbf{a}_3^{(1)} = \mathbf{a}_3^{(0)} - m_{13}\mathbf{a}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{a}_4^{(1)} = \mathbf{a}_4^{(0)} - m_{14}\mathbf{a}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Assim, ao final no primeiro estágio do método da eliminação de Gauss, temos a matriz aumentada:

$$[\mathbf{A}^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -7 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -10 \end{array}\right]$$

Procedendo de forma semelhante, no segundo estágio calculamos os multiplicadores

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{e} \quad m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 4.$$

e, com eles, encontramos a matriz aumentada

$$[\mathbf{A}^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \end{array}\right]$$

No último estágio (estágio 3), calculamos o multiplicador

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{2}{2} = 1,$$

e determinamos a matriz aumentada

$$[\mathbf{A}^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Finalmente, usando a substituição regressiva, a solução do sistema linear é

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo da Eliminação de Gauss

Entrada: Matriz não-singular $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

para $j = 1$ *até* $n - 1$ **faça**

  para $i = j + 1$ *até* n **faça**

- $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$.
- $b_i = b_i - m_{ij} b_j$.

    para $k = j + 1$ *até* n **faça**

  - $a_{ik} = a_{ik} - m_{ij} a_{jk}$

    fim

  fim

fim

Resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com substituição regressiva.

Saída: Solução do sistema linear.

No algoritmo acima, **U** e **c** são escritas sobre **A** e **b** para economizar espaço na memória.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método da eliminação de Gauss para a resolução de sistemas lineares.

Sistemas lineares são encontrados em diversas aplicações científicas e industriais. Apresentamos o modelo de Leontief usando em economia no apêndice dessa aula!

Na próxima aula revisaremos o método da eliminação de Gauss destacando aspectos computacionais desse importante método e sua relação com a chamada fatoração LU.

Muito grato pela atenção!

Apêndice

Aplicação em Economia

Modelo de Leontief

Wassily Leontief recebeu o prêmio Nobel em Economia em 1973 por apresentar um modelo matemático que descreve vários fenômenos econômicos.

Suponha que a economia de um país ou região pode ser dividida em n setores que produzem ou oferecem n produtos diferentes.

Vamos admitir que um setor depende do produto dos outros setores e, possivelmente, do seu próprio setor.

Seja q_{ij} o montante (ou consumo) da entrada do i-ésimo setor necessário para produzir uma unidade de produção do j-ésimo setor.

Seja x_j a produção ou oferta do j-ésimo setor, que pode ser medida, por exemplo, usando uma unidade monetária.

Seja d_i a demanda do produto ou oferta do i-ésimo setor.

O objetivo é determinar a produção e oferta de modo a atender à demanda total.

Em termos matemáticos, devemos ter

$$\begin{cases} x_1 &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n + d_1, \\ x_2 &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \ldots + q_{2n}x_n + d_2, \\ &\vdots \\ x_n &= q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \ldots + q_{nn}x_n + d_n. \end{cases}$$

Equivalentemente, temos o seguinte sistema com n equações e n incógnitas:

$$\begin{cases} (1-q_{11})x_1 - q_{12}x_2 - \ldots - q_{1n}x_n & = d_1, \\ -q_{21}x_1 + (1-q_{22})x_2 - \ldots - q_{2n}x_n & = d_2, \\ & \vdots \\ -q_{n1}x_1 - q_{n2}x_2 - \ldots + (1-q_{nn})x_n & = d_n. \end{cases}$$

Ilustraremos o modelo de Leontief e o método da eliminação de Gauss para resolver sistemas lineares com um exemplo simples com valores artificiais.

Exemplo Simples

Suponha que a economia de um país possa ser dividida em:

1. Agricultura (S_1) – Café, laranja, cana-de-açúcar, milho, etc.
2. Pecuária (S_2) – Carne bovina, carne de frango e carne suína.
3. Industria (S_3) – Veículos, combustíveis, alimentos, bebidas, etc.
4. Serviços (S_4) – Telecomunicações, transporte, técnico, etc.

Considere a seguinte tabela de produção, consumo e demanda:

	Agricultura	Pecuária	Industria	Serviços	Demanda
S_1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.5
S_2	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4
S_3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.3
S_4	0.2	0.2	0.4	0.2	0

Nesse caso, teremos o sistema linear:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, & (\ell_1^{(0)}) \\ -0.2x_1 & +0.9x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.4, & (\ell_2^{(0)}) \\ -0.3x_1 & -0.3x_2 & +0.8x_3 & -0.2x_4 & = 0.3, & (\ell_3^{(0)}) \\ -0.2x_1 & -0.2x_2 & -0.4x_3 & +0.8x_4 & = 0, & (\ell_4^{(0)}) \end{cases}$$

em que x_1, x_2, x_3, e x_4 denotam a produção dos setores S_1, S_2, S_3 e S_4, respectivamente.

Vamos resolver o sistema linear acima usando o **método da eliminação de Gauss.**

Método da Eliminação de Gauss

Primeiro, adicionamos a segunda, terceira e quarta equações, múltiplos da primeira equação:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, & \\ & +0.85x_2 & -0.25x_3 & -0.38x_4 & = 0.53, & (\ell_2^{(1)} \leftarrow \ell_2^{(0)} + \frac{0.2}{0.8}\ell_1^{(0)}) \\ & -0.38x_2 & 0.73x_3 & -0.31x_4 & = 0.49, & (\ell_3^{(1)} \leftarrow \ell_3^{(0)} + \frac{0.3}{0.8}\ell_1^{(0)}) \\ & -0.25x_2 & -0.45x_3 & +0.73x_4 & = 0.12, & (\ell_4^{(1)} \leftarrow \ell_4^{(0)} + \frac{0.2}{0.8}\ell_1^{(0)}) \end{cases}$$

Os múltiplos são escolhidos de modo a *eliminar* o termo x_1 da segunda, terceira e quarta equações.

Posteriormente, adicionamos a terceira e quarta equações, múltiplos da segunda equação:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, & \\ & +0.85x_2 & -0.25x_3 & -0.38x_4 & = 0.53, & \\ & & 0.61x_3 & -0.48x_4 & = 0.72, & (\ell_3^{(2)} \leftarrow \ell_3^{(1)} + \frac{0.38}{0.85}\ell_2^{(1)}) \\ & & -0.52x_3 & +0.61x_4 & = 0.28, & (\ell_4^{(2)} \leftarrow \ell_4^{(1)} + \frac{0.25}{0.85}\ell_2^{(1)}) \end{cases}$$

Os múltiplos são escolhidos de modo a *eliminar* o termo x_2 da terceira e quarta equações.

No terceiro estágio do método da eliminação de Gauss, adicionamos a quarta equação um múltiplo da terceira:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, \\ & +0.85x_2 & -0.25x_3 & -0.38x_4 & = 0.53, \\ & & 0.61x_3 & -0.48x_4 & = 0.72, \\ & & & +0.21x_4 & = 0.89, \quad (\ell_4^{(3)} \leftarrow \ell_4^{(2)} + \frac{0.52}{0.61}\ell_3^{(2)}) \end{cases}$$

O múltiplo é escolhido de modo a *eliminar* o termo x_3 da quarta equação.

Finalmente, determinamos a solução do sistema linear usando a chamada **substituição regressiva** (ou **regressa**).

Especificamente, da quarta equação, concluímos que

$$x_4 = \frac{0.89}{0.21} = 4.24.$$

Substituindo o valor de x_4 na terceira equação, obtemos:

$$x_3 = \frac{0.72 + 0.48x_4}{0.61} = \frac{0.72 + 0.48 \times 4.24}{0.61} = 4.51.$$

Analogamente, obtemos

$$x_2 = \frac{0.53 + 0.25x_3 + 0.38x_4}{0.85} = 3.84,$$

e

$$x_1 = \frac{0.5 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4}{0.8} = 4.32.$$

Concluindo, para atender tanto a demanda interna como a demanda externa, os setores S_1, S_2, S_3 e S_4 devem produzir respectivamente 4.32, 3.84, 4.51 e 4.29.

Nesse exemplo, admitimos que a economia é dividida em 4 setores.

A economia brasileira pode ser dividida em mais de 50 setores, confirmando a necessidade de métodos eficientes para a resolução de sistemas lineares com um número significativo de equações e incógnitas!

Muito grato pela atenção!