Cálculo III

Aula 26 – Separação de Variáveis e a Equação da Onda.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Equação da Onda

Considere uma corda elástica de comprimento L presa nas extremidades em suportes de mesmo nível horizontal.

Vamos denotar por $u(x,t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto $0 \leq x \leq L$ no instante $t \geq 0$.

Desprezando efeitos de amortecimento e supondo que a amplitude do movimento não é grande, u satisfaz a equação diferencial parcial

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$

em que a é a velocidade de propagação de ondas ao longo da corda (depende da tensão e da massa por unidade de comprimento).

Para descrever o movimento da corda, precisamos também das condições iniciais e de contorno.

Condições de Iniciais e de Contorno

Como as extremidades da corda permanecem fixas, as condições de contorno são:

$$u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0.$$

As condições iniciais são:

- Posição inicial:

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

- Velocidade inicial:

$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

em que f e g são funções tais que

$$f(0) = f(L) = 0 \quad \text{e} \quad g(0) = g(L) = 0.$$

Corda Elástica com Deslocamento Não-Nulo

Iniciaremos o estudo do problema de vibrações de uma corda elástica admitindo que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$g(x) = 0, \quad \forall 0 \leq x \leq L.$$

Em outras palavras, considere o problema

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, . \end{cases}$$

em que $f(0) = f(L) = 0$ descreve a configuração inicial da corda.

Separação de Variáveis

Vamos admitir que u pode ser escrita como

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

em que X depende apenas de x e T depende somente de t.

Derivando e substituindo na equação diferencial parcial, obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda,$$

em que λ é uma constante de separação.

Equivalentemente, temos as equações diferenciais ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad T'' + a^2\lambda T = 0.$$

Usando a condição de contorno, encontramos o problema

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0,$$

cuja solução é

$$X_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \lambda_m = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Com as constantes de separação acima, obtemos a EDO

$$T'' + \omega^2 T = 0, \quad \text{com} \quad \omega = \frac{m\pi a}{L},$$

cujas soluções são

$$T(t) = k_1 \cos(\omega t) + k_2 \operatorname{sen}(\omega t).$$

Como a velocidade inicial é nula, deduzimos

$$u_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0, \forall\ 0 \leq x \leq L \quad \Longrightarrow \quad T'(0) = 0.$$

Como

$$T'(t) = -\omega k_1 \operatorname{sen}(\omega t) + \omega k_2 \cos(\omega t),$$

temos

$$T'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_2 = 0.$$

Assim, as soluções fundamentais da equação da onda, com as condições de contorno e a segunda condição inicial, são

$$u_m(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi a t}{L}\right),$$

para $m = 1, 2, \ldots$.

Note que u_m é periódica no tempo com período $2L/ma$.

A superposição das soluções fundamentais fornece

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi a t}{L}\right).$$

Finalmente, a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, fornece

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = f(x).$$

Portanto, admitindo que f é uma função ímpar com período $T = 2L$, concluímos que os coeficiente satisfazem

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Concluindo, a solução do problema

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L,. \end{cases}$$

é

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi a t}{L}\right),$$

em que

$$c_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Observações

- A solução é a superposição de funções periódicas no tempo com período $2L/ma$.
- As quantidades $m\pi a/L$ são chamadas **frequências naturais da corda**.
- O fator $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ é chamado **modo natural** de vibração.
- O período do modo natural de vibração $2L/m$ é chamado **comprimento da onda**.

Exemplo 1

Considere uma corda vibrante de comprimento $L = 30$ que satisfaz a equação da onda

$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 30 \quad \text{e} \quad t > 0.$$

Suponha que as extremidades da corda estão fixas e que a corda é colocada em movimento sem velocidade inicial da posição inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10, \\ \frac{(30-x)}{20}, & 10 < x \leq 30. \end{cases}$$

Encontre o deslocamento $u(x,t)$ da corda.

Exemplo 1

Considere uma corda vibrante de comprimento $L = 30$ que satisfaz a equação da onda

$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 30 \quad \text{e} \quad t > 0.$$

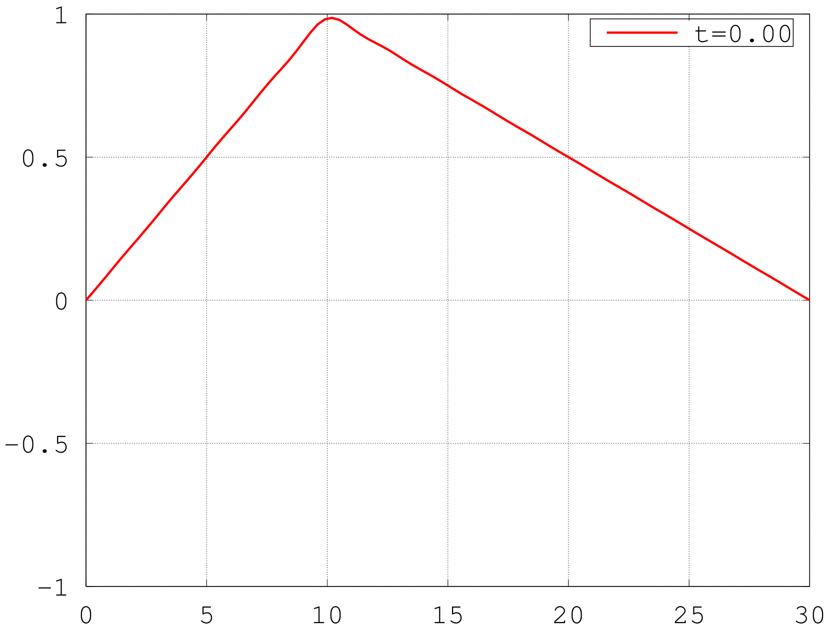
Suponha que as extremidades da corda estão fixas e que a corda é colocada em movimento sem velocidade inicial da posição inicial

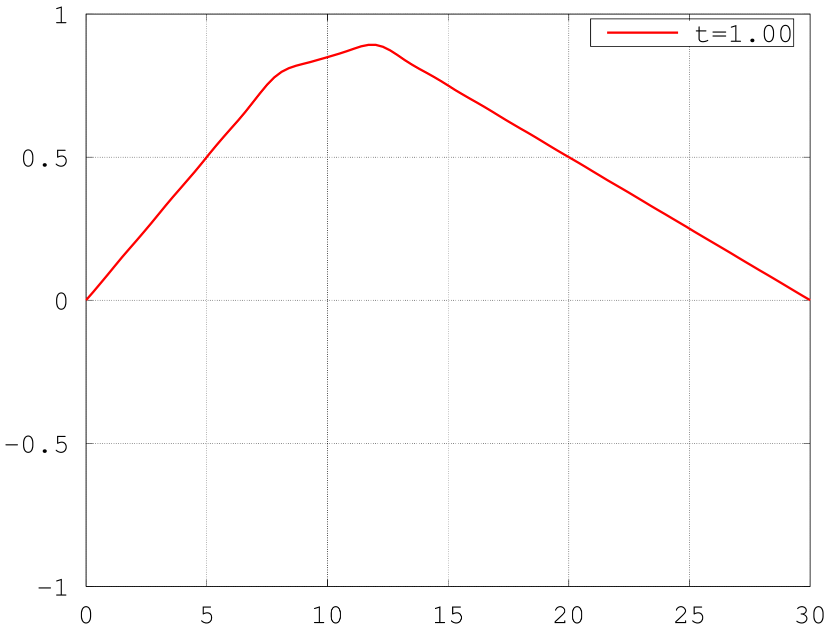
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10, \\ \frac{(30-x)}{20}, & 10 < x \leq 30. \end{cases}$$

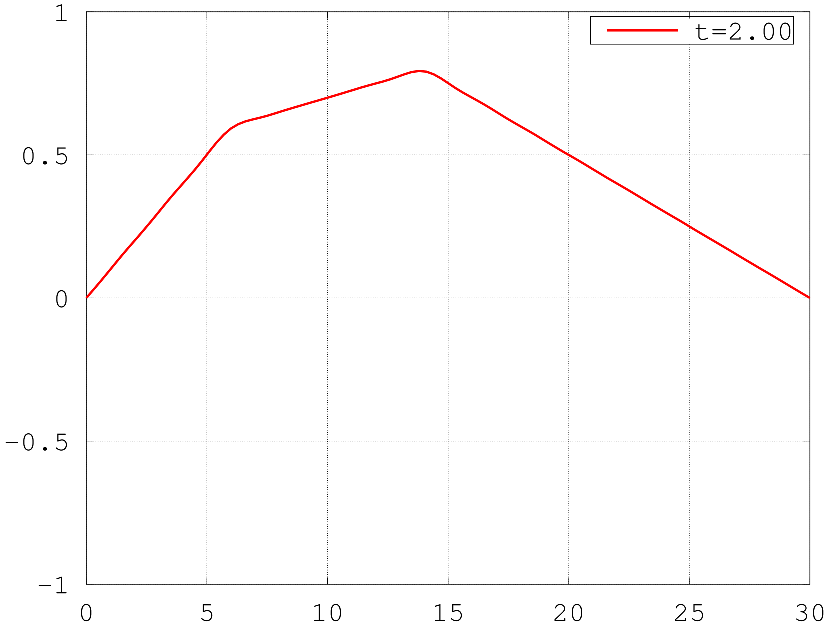
Encontre o deslocamento $u(x,t)$ da corda.

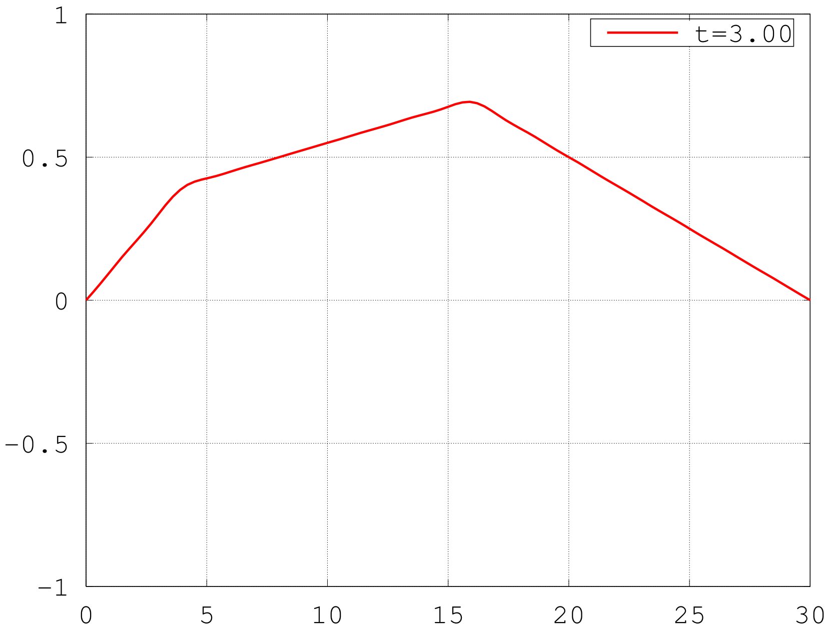
Resposta: A solução é

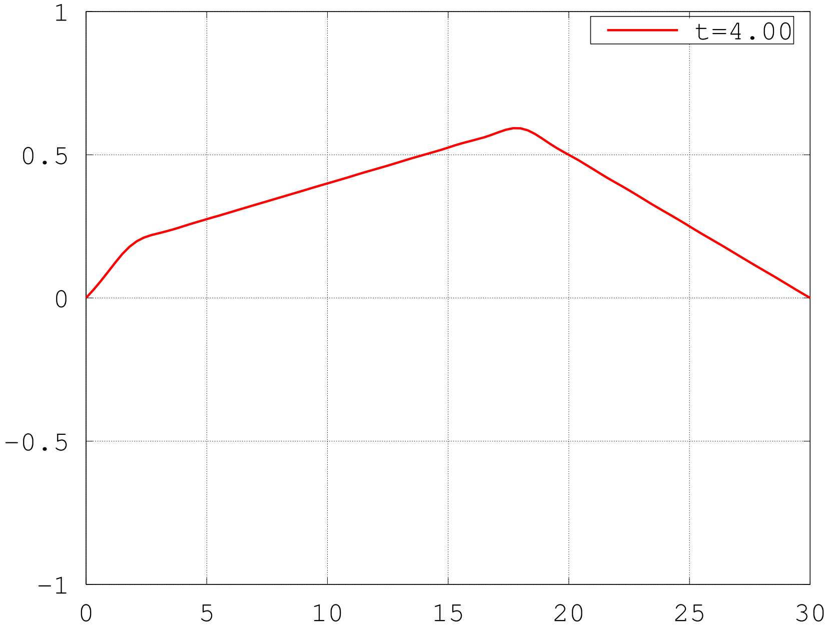
$$u(x,t) = \frac{9}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{30}\right) \cos\left(\frac{2m\pi t}{30}\right).$$

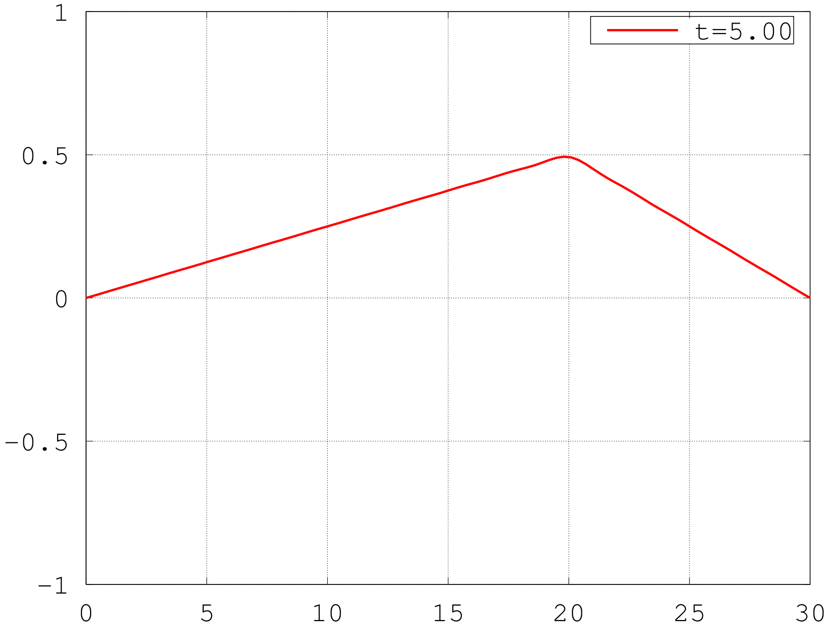

t=0.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30


t=1.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

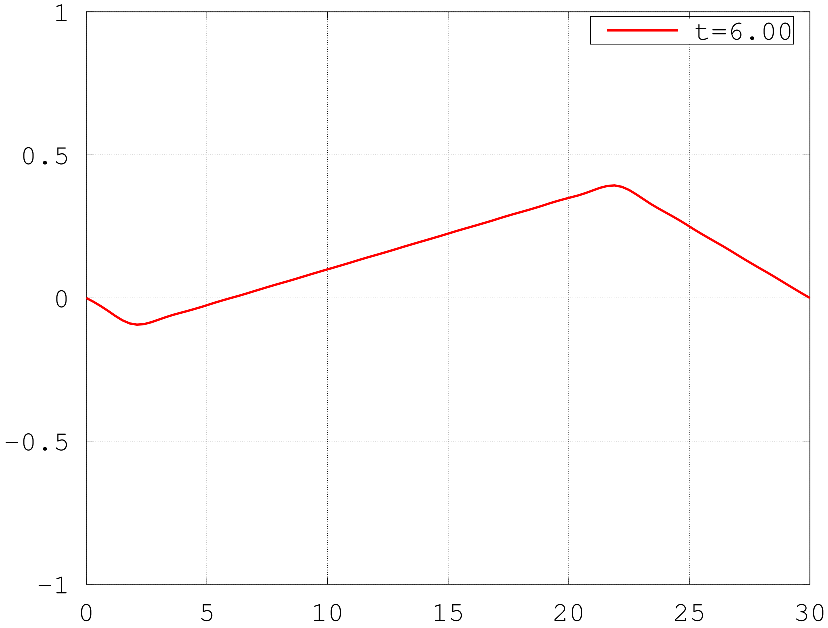

t=2.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

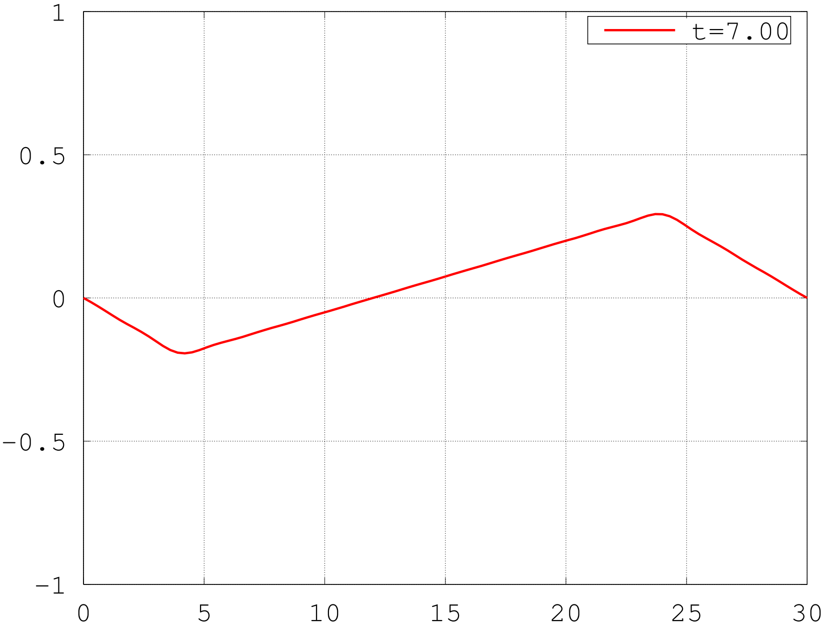

t=3.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

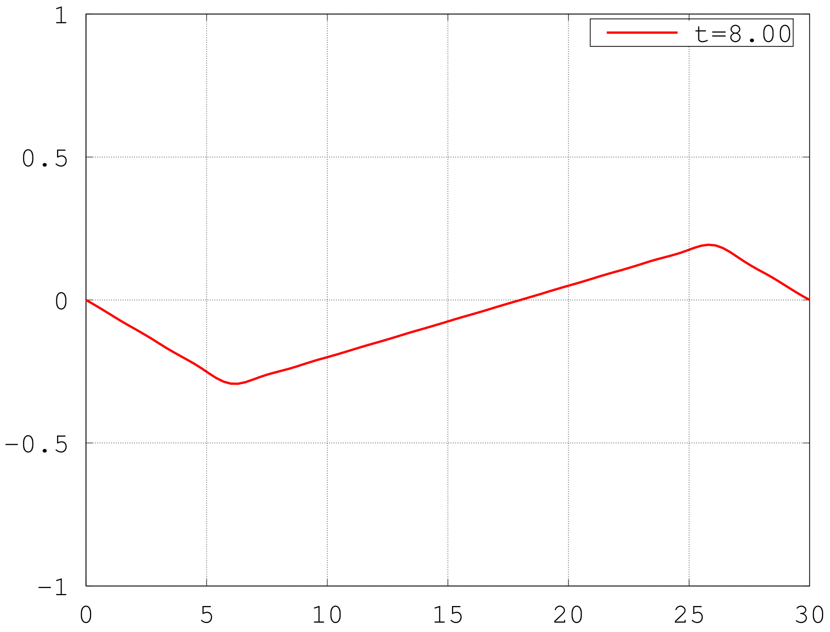

t=4.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

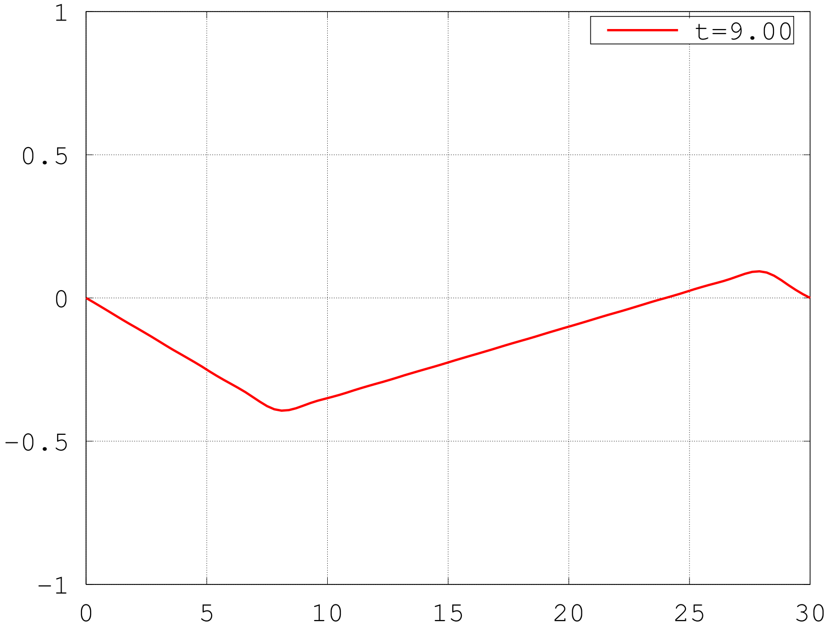


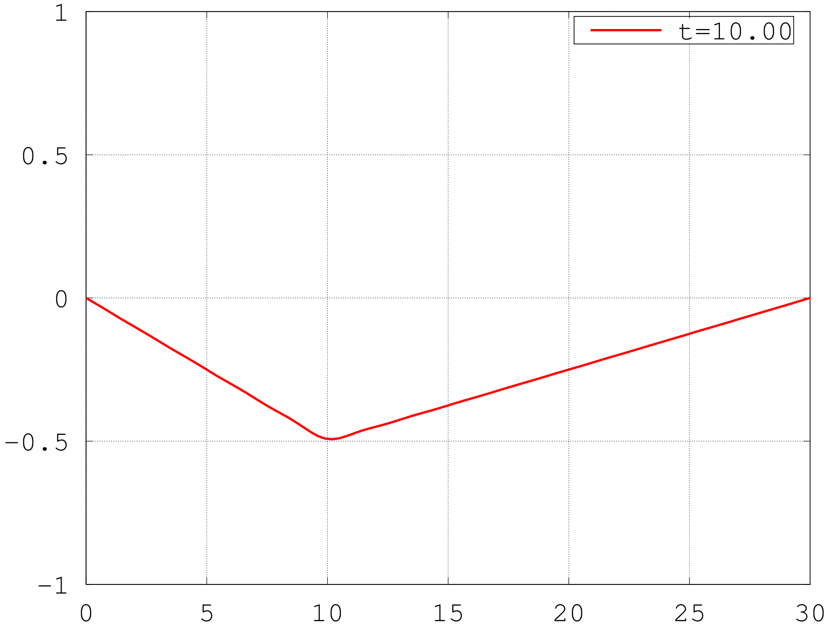
t=5.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30


t=6.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

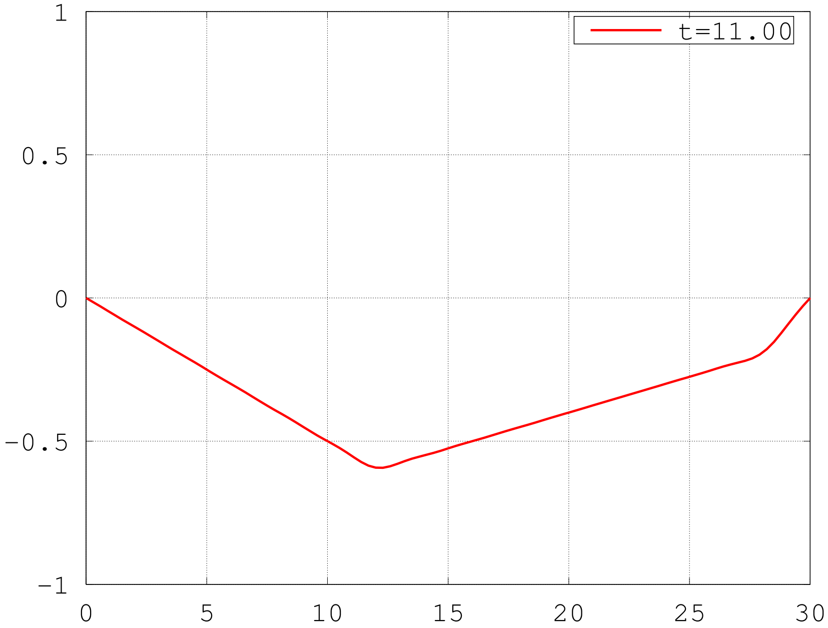

t=7.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30


t=8.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

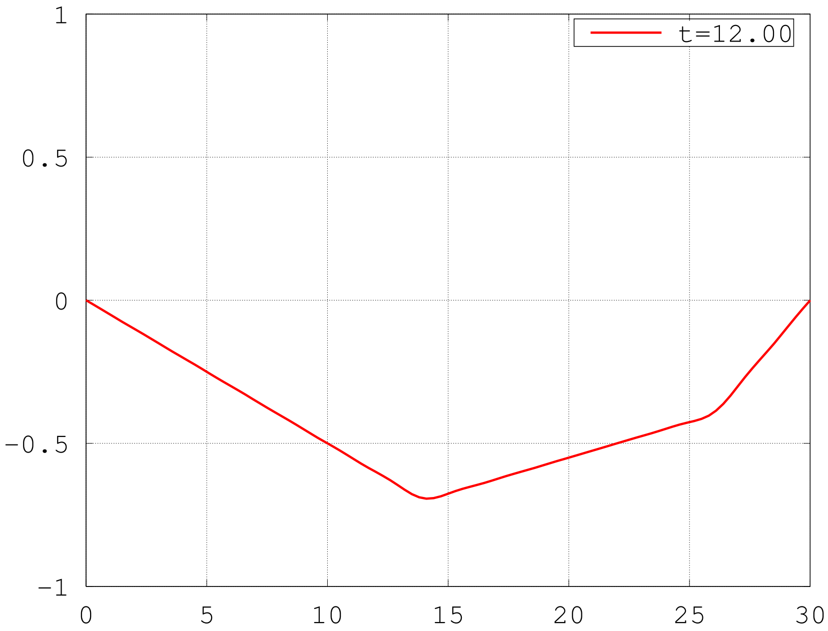

t=9.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

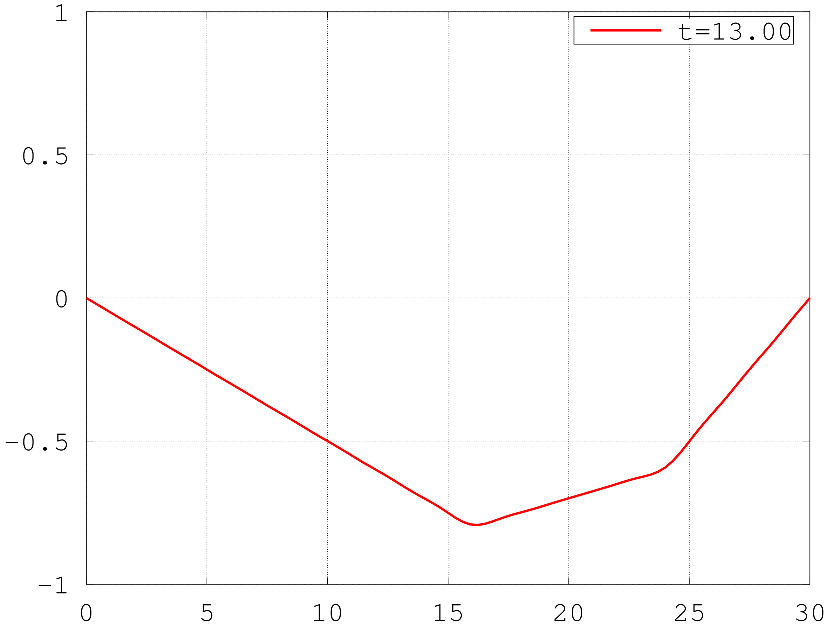


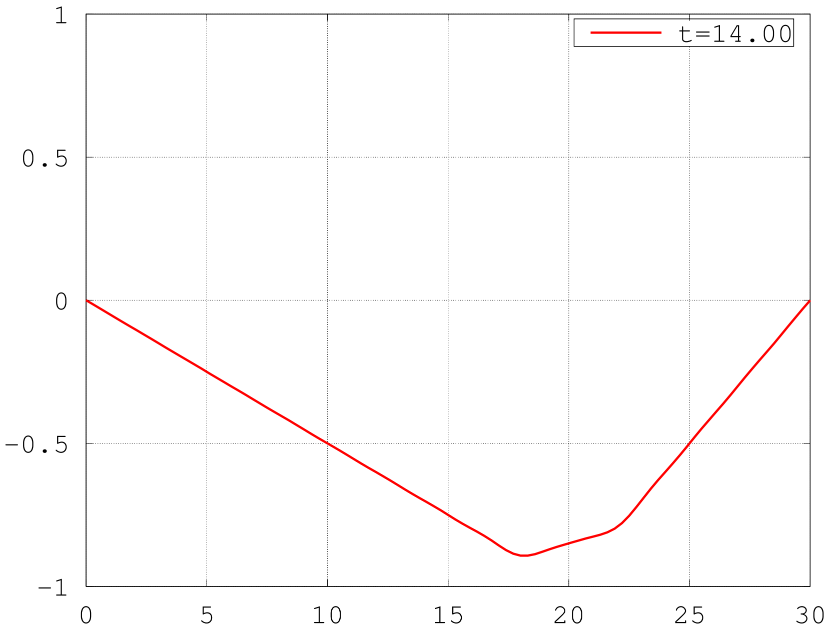
t=10.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

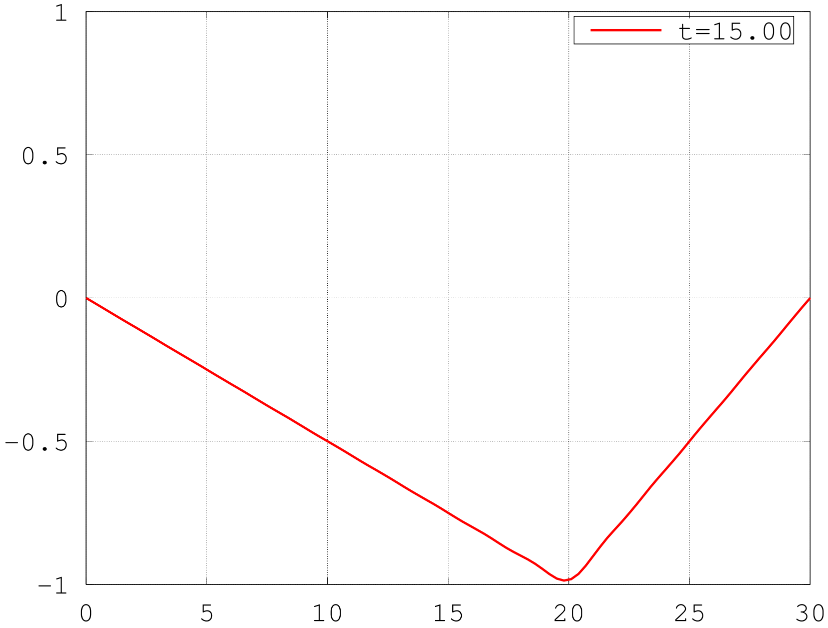


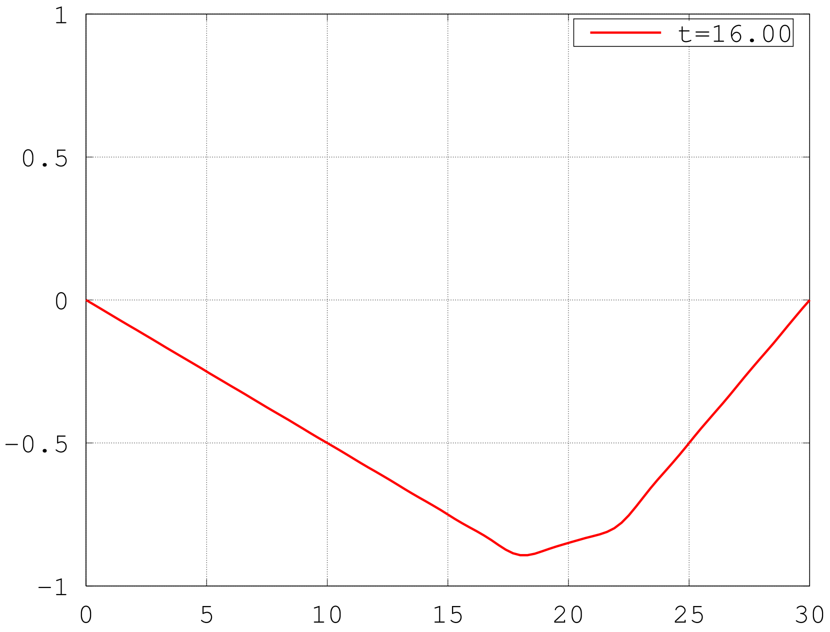
t=11.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30


t=12.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

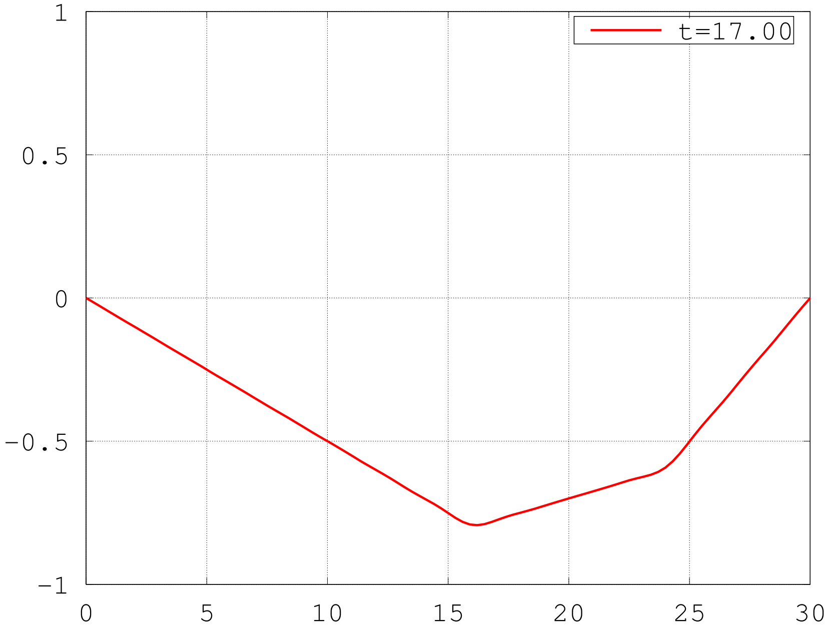

t=13.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

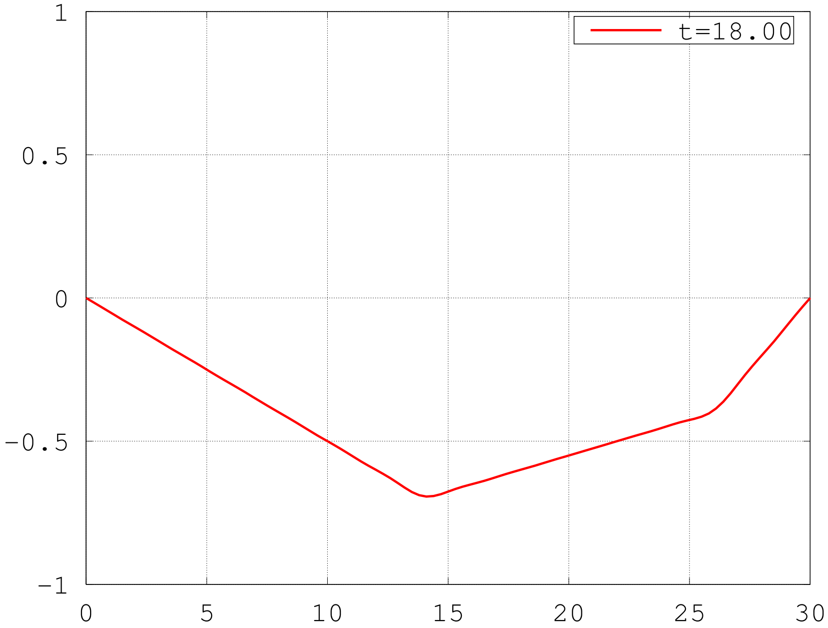

t=14.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

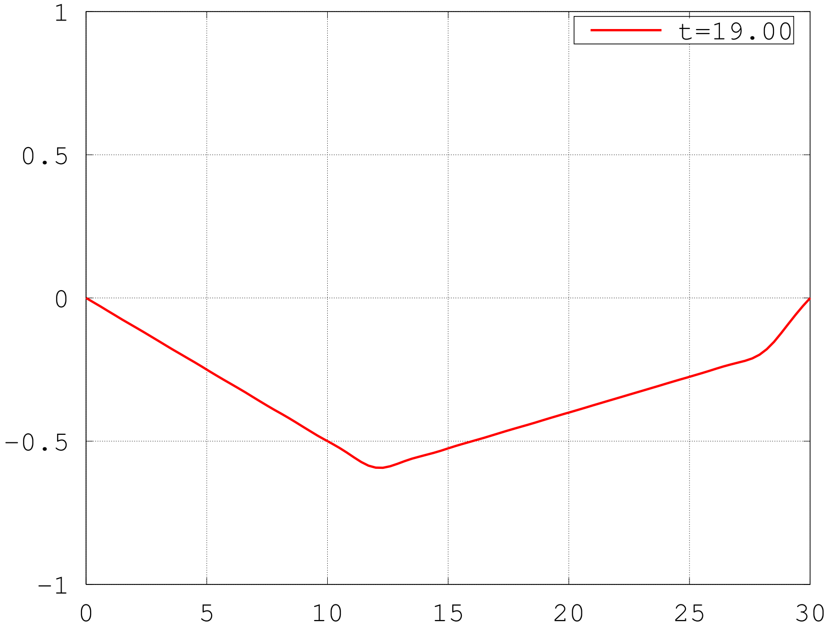

t=15.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

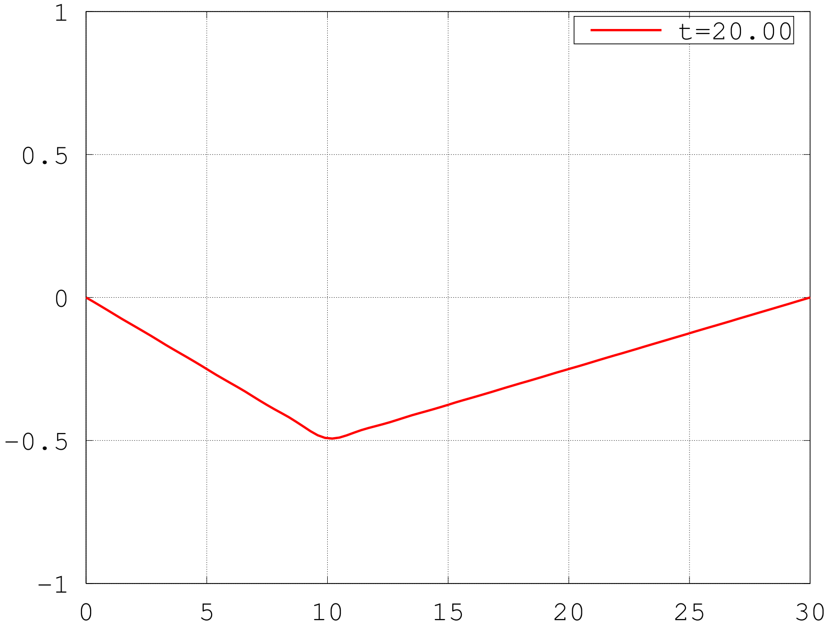


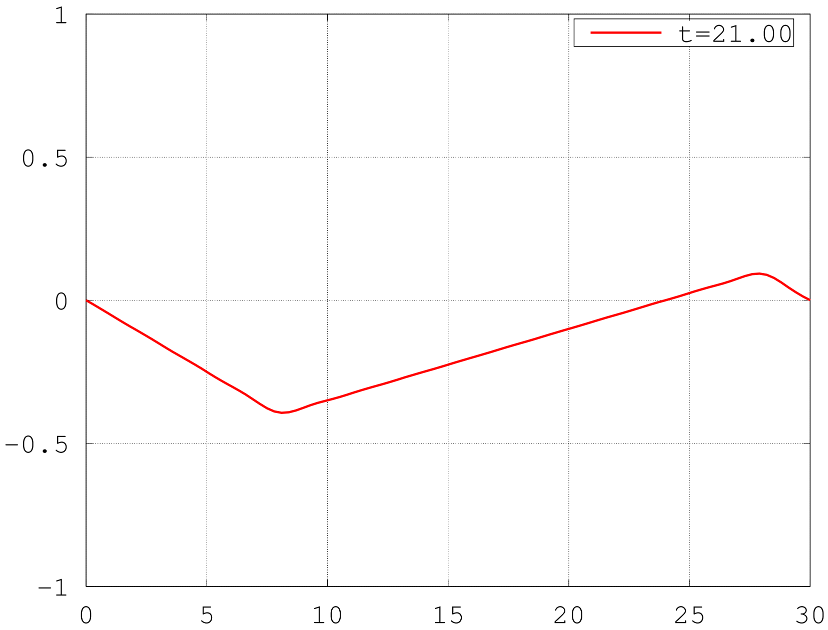
t=16.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

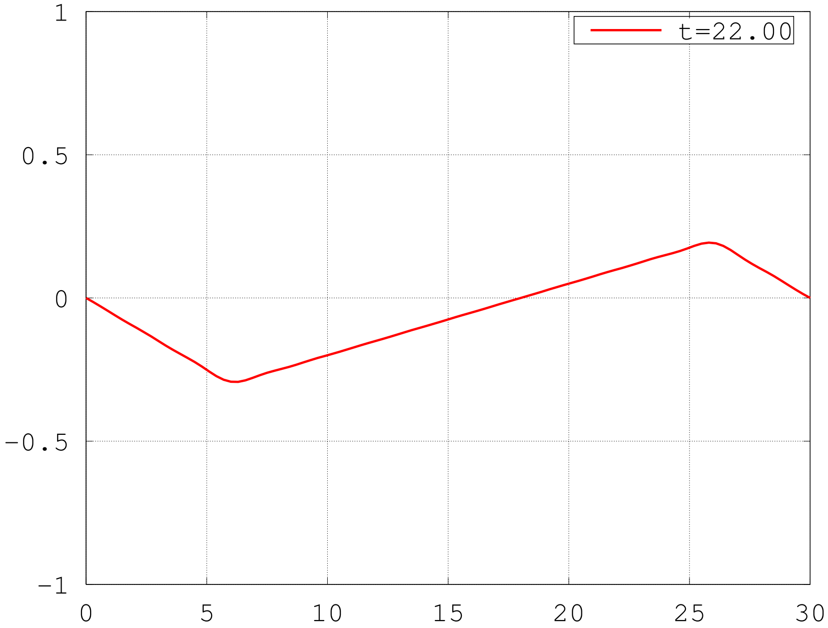

t=17.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

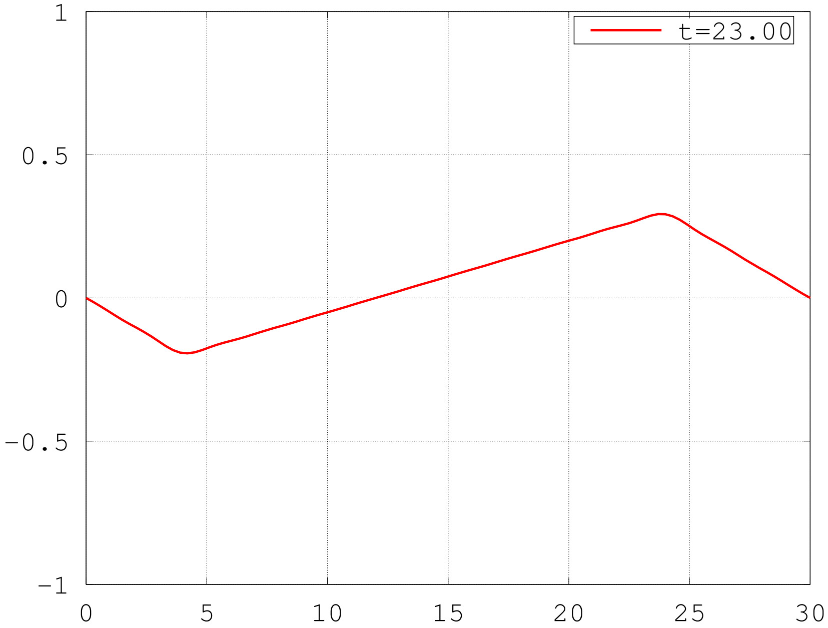

t=18.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

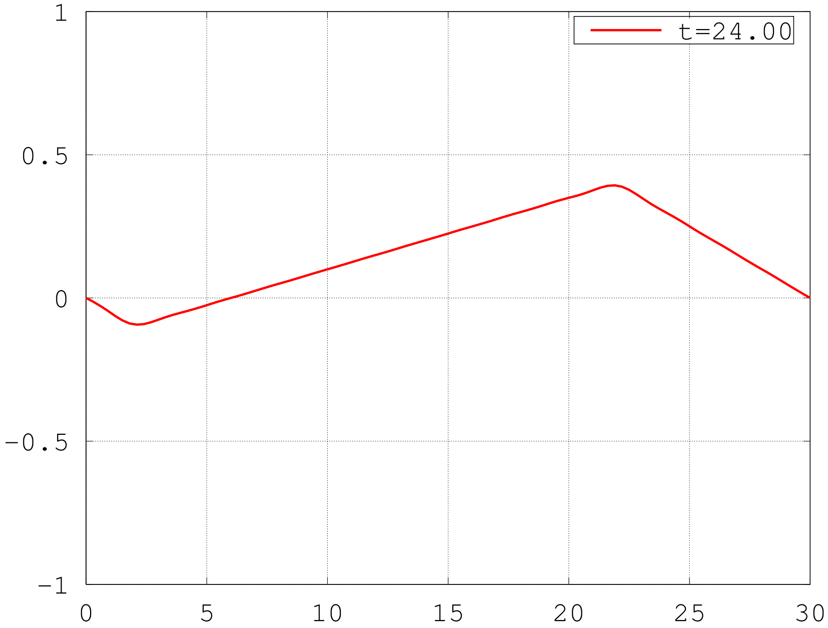

t=19.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

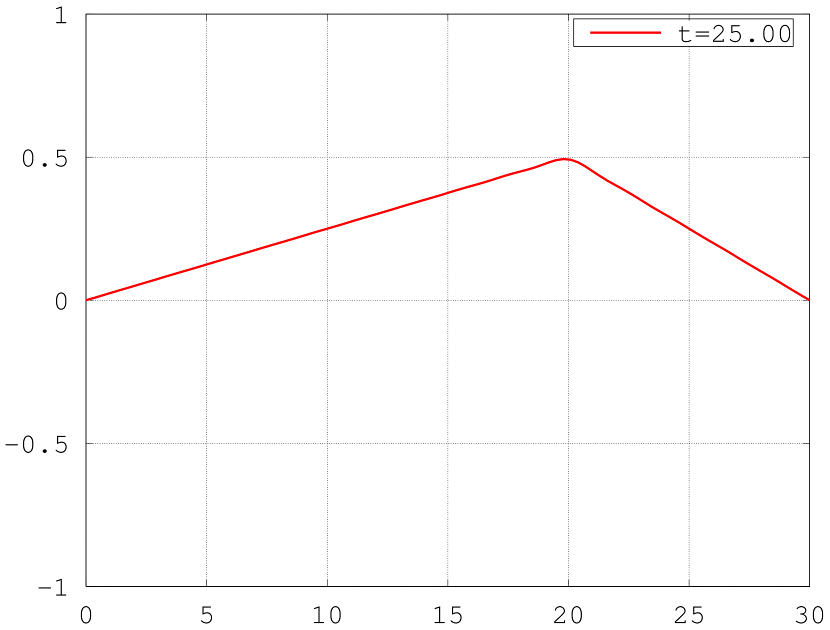

t=20.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

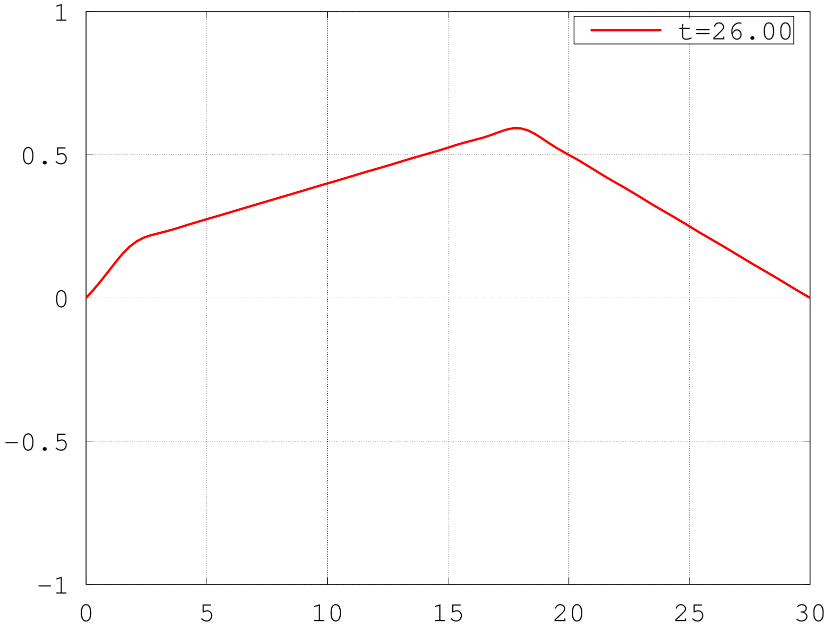

t=21.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

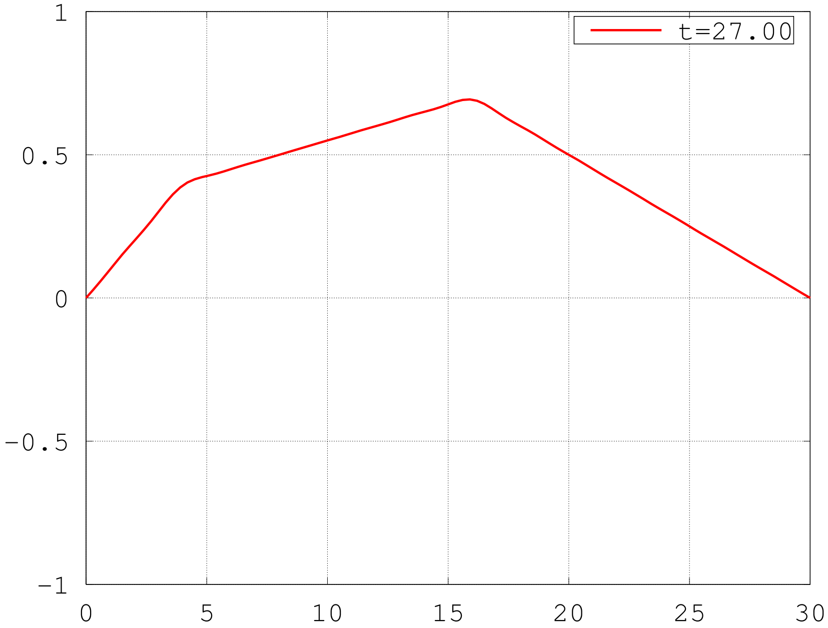

t=22.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30


t=23.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

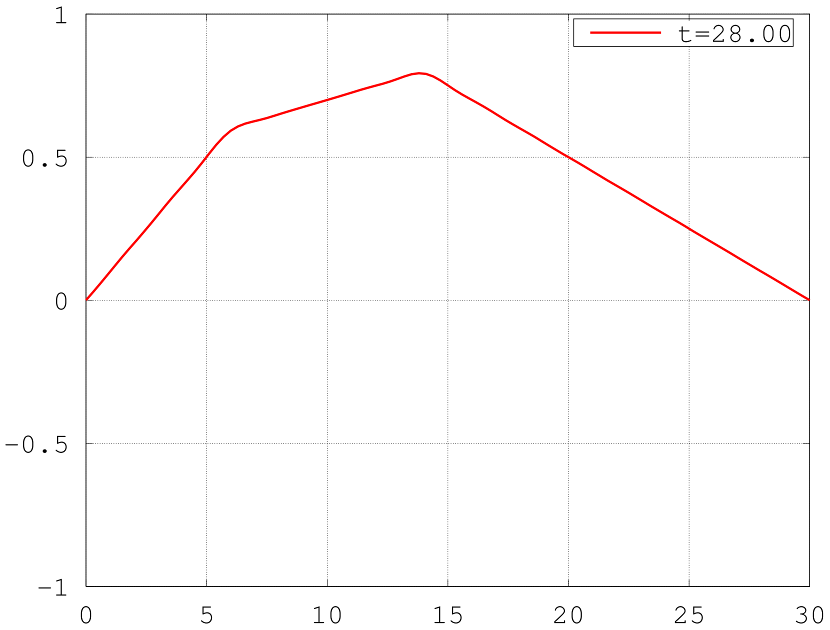

t=24.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

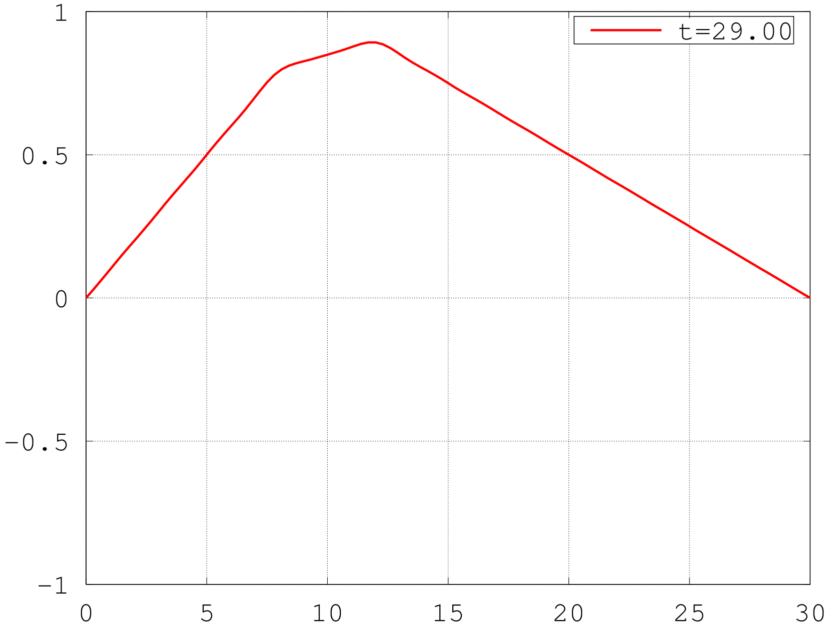

t=25.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

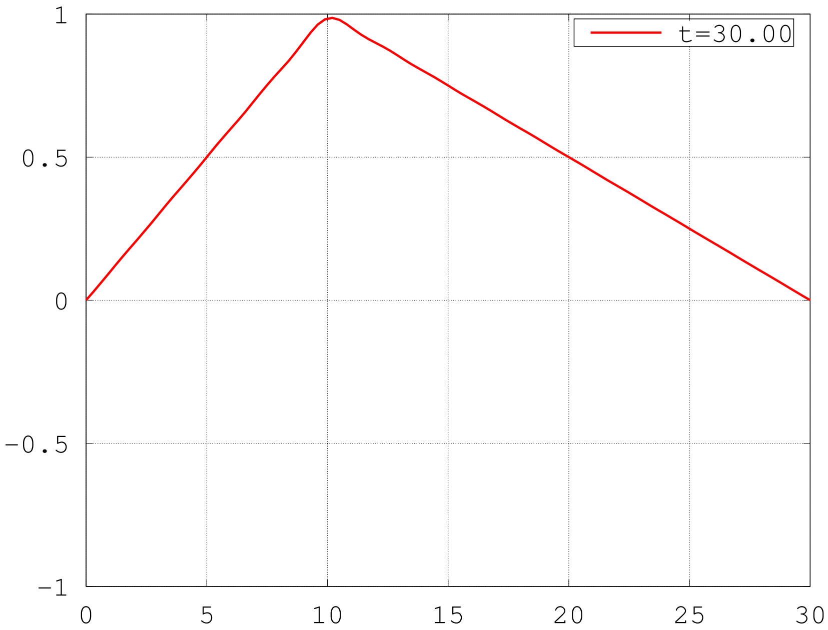

t=26.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30



1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
t=27.00


t=28.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30


t=29.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30



t=30.00
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30

Corda Elástica com Velocidade Não-Nula

Um problema semelhante ao discutido anteriormente, consiste no estudo das vibrações de uma corda que é colocada em movimento a partir do repouso com uma velocidade dada.

Formalmente, temos o problema

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

em que $g(x)$ é a velocidade inicial da corda no ponto x.

Procedendo de forma semelhante, concluímos que a solução é

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi a t}{L}\right),$$

em que

$$k_m = \frac{2}{m\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Esclarecemos que o fator $2/(m\pi a)$ multiplicando a integral acima aparece porque precisamos identificar a série de Fourier em senos da derivada

$$u_t(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi a}{L} k_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi a t}{L}\right),$$

com a série de Fourier em senos de g.

Problema Geral para a Corda Elástica

Finalmente, a solução do problema geral

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ descrevem, respectivamente, a posição e a velocidade inicial da corda no ponto x, é obtido superpondo as soluções dos problemas anteriores, ou seja,

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

em que v e w são as soluções da corda elástica com deslocamento não-nulo e velocidade não-nula, respectivamente.

Muito grato pela atenção!