Cálculo III

Aula 25 – Separação de Variáveis e a Equação do Calor.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos a série de Fourier. As séries de Fourier aparecem naturalmente quando resolvemos a equação do calor pelo método da separação de variáveis.

Especificamente, nas próximas aulas estudaremos três problemas fundamentais que envolvem as equações diferenciais parciais:

- Equação do calor: Que descreve um processo de difusão.
- Equação da onda: Que descreve um processo oscilatório.
- Equação do potencial: Que descreve um processo estacionário.

O método da separação de variáveis, que em termos gerais consistem em separar pelo sinal de igualdade os termos envolvendo as derivadas parciais, será apresentado através de exemplos, começando com a equação do calor.

Equação do Calor

Considere um problema de condução de calor em um barra reta homogênea de comprimento L e espessura desprezível (muito menor que L). Suponha ainda que os lados da barra estão perfeitamente isolados.

Vamos denotar por $u(x,t)$ a temperatura da barra em um ponto $0 \leq x \leq L$ no instante $t \geq 0$. A variação de temperatura da barra é descrita pela **equação do calor**:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad t > 0,$$

em que α^2 é a **difusividade térmica**, e depende do material do qual a barra é feita.

Vamos admitir ainda que conhecemos a temperatura inicial da barra, ou seja, temos a **condição inicial**

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Também vamos supor que as extremidades da barra são mantidas a temperaturas fixas. Por simplicidade, vamos considerar inicialmente a **condição de contorno**

$$u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

O objetivo será encontrar $u(x,t)$ que satisfaz a equação do calor, a condição inicial e a condição de contorno, ou seja, devemos resolver

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad t > 0. \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \quad \forall t > 0. \end{cases}$$

No método da separação de variáveis, admitimos

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

em que X depende somente de x e T depende apenas de t.

Derivando e substituindo na equação do calor, encontramos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda,$$

em que λ é uma constante (não depende de x nem de t!), chamada **constante de separação**. Equivalentemente, temos

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad T' + \alpha^2 \lambda T = 0.$$

Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ nas condições de contorno, obtemos

$$X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0.$$

Temos assim o problema de valor de contorno para X:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0,$$

cujas soluções são

$$X_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \lambda_m = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

chamados respectivamente **autofunções** e **autovalores**.

Além disso, a equação diferencial em T,

$$T' + \left(\frac{m\pi\alpha}{L}\right)^2 T = 0,$$

obtida escrevendo $\lambda \equiv \lambda_m$, admite como solução

$$T(t) = e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Combinando os resultados anteriores com $u(x,t) = X(x)T(t)$, obtemos as **soluções fundamentais**:

$$u_n = e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Admitindo que a solução do problema é uma combinação linear de todas as soluções fundamentais, encontramos

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

que satisfaz a equação do calor e as condições de contorno.

Finalmente, da condição inicial obtemos

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

que corresponde à série de Fourier em senos de f.

Admitindo que f é uma função ímpar com período $T = 2L$, temos

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Solução do problema de condução de calor com condições de contorno homogêneas

Concluindo, a solução de

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad t > 0. \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \quad \forall t > 0. \end{cases}$$

é

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

com

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Exemplo 1

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de $20^o C$ em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a $0^o C$ para todo $t \geq 0$.

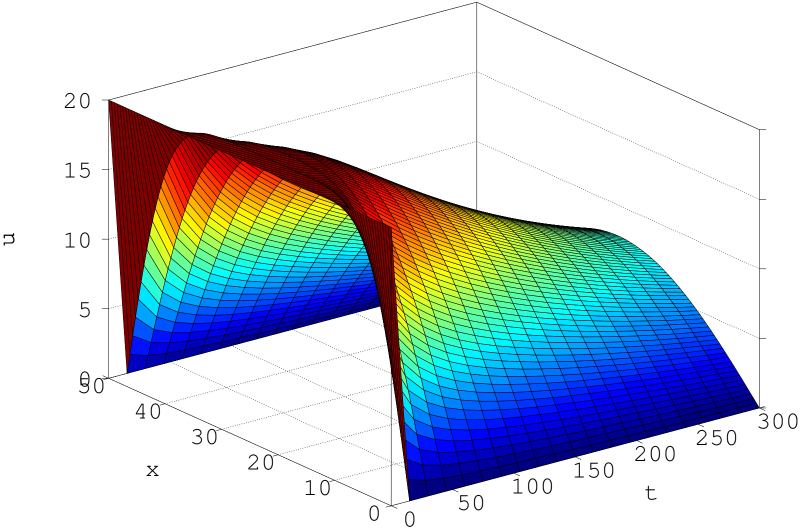
Exemplo 1

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de $20^o C$ em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a $0^o C$ para todo $t \geq 0$.

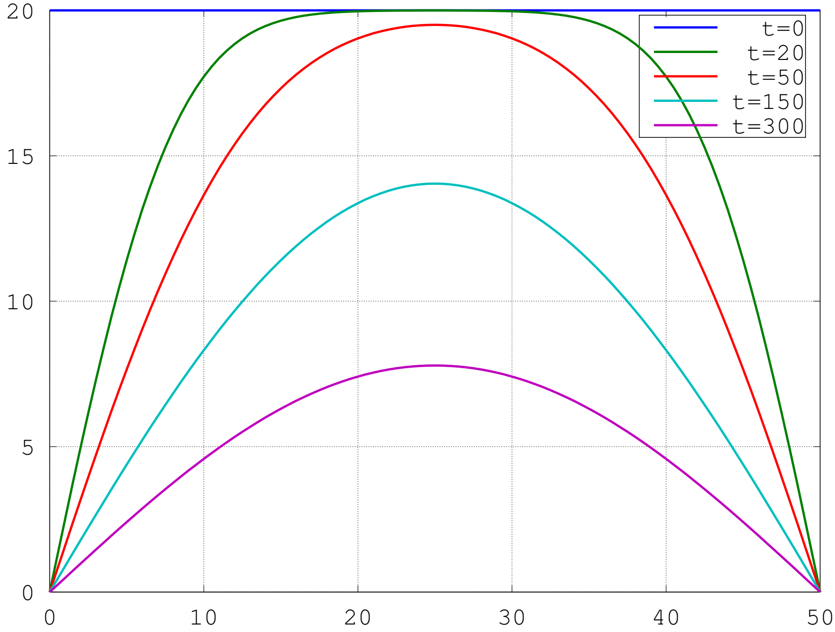
Resposta: A temperatura da barra satisfaz o problema de condução de calor com $L = 50$ e $f(x) = 20$ para todo $0 < x < 50$. Logo,

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-(2m-1)^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{50}\right).$$

Nos gráficos a seguir consideramos $\alpha = 1$, que corresponde à difusibilidade térmica de um material entre o cobre e o alumínio.



20
15
10
5
0
u
50
40
30
20
10
0
x
0
50
100
150
200
250
300
t


20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
t=0
t=20
t=50
t=150
t=300

Condições de contorno não-homogêneas

Num problema de condução de calor com condições de contorno não-homogêneas

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = T_1 \quad \text{e} \quad u(L,t) = T_2, \quad \forall t > 0, \end{cases}$$

admitimos

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t).$$

Dessa forma, obtemos

$$u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

com

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right] \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Exemplo 2

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 25cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja temperatura inicial é $u(x,0) = x$ para $0 < x < 25$.

Observação:

Diferente do problema anterior em que as extremidades da barra tinha temperaturas fixas, nesse problema as extremidades da barra estão isoladas.

Em termos matemáticos, temos

$$u_x(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(L,t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Exemplo 2

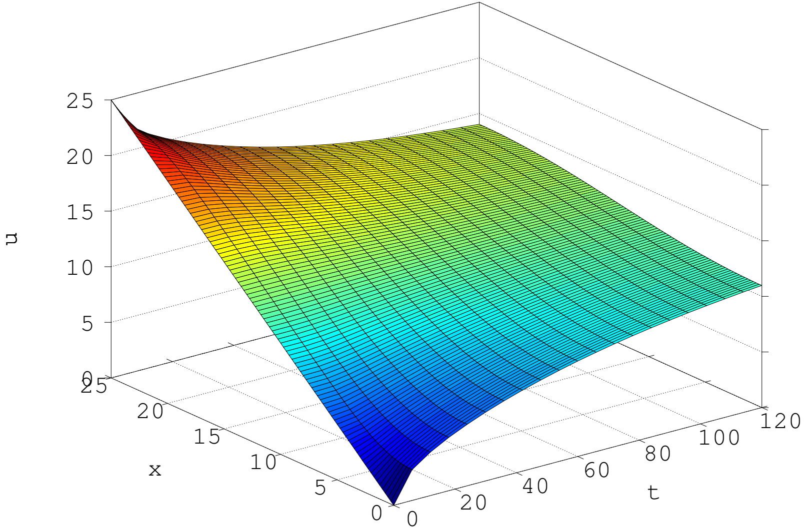
Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 25cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja temperatura inicial é $u(x,0) = x$ para $0 < x < 25$.

Resposta: A temperatura é descrita por:

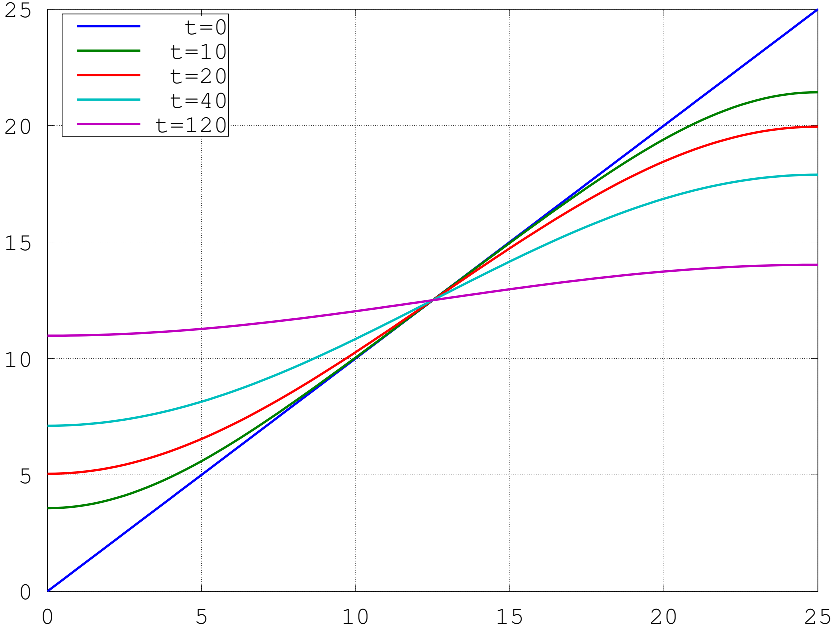
$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < 25 \quad \text{e} \quad t > 0, \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq 25, \\ u_x(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(25,t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases}$$

Pelo método da separação de variáveis, encontramos

$$u(x,t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2\pi^2\alpha^2 t/625} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{25}\right).$$



25
20
15
10
5
0
u
25
20
15
10
5
0
x
0
20
40
60
80
100
120
t


t=0
t=10
t=20
t=40
t=120
0
5
10
15
20
25
0
5
10
15
20
25

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o método da serparação de variáveis. Resumidamente, nesse método admitimos

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

em que X depende somente de x e T depende somente de T.

Resolvendo o problema de valor de contorno em x, obtemos os autovalores e autofunções. Os autovalores e as autofunções, com solução em t, fornecem soluções fundamentais do problema.

Finalmente, a solução do problema é uma combinação linear de todas as soluções fundamentais com os coeficientes da série de Fourier em senos ou cossenos da função f que descreve a condição inicial.

Muito grato pela atenção!