Cálculo III

Aula 24 – Teoremas e Propriedades das Séries de Fourier.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos a série de Fourier.

Nos pontos em que ela converge, temos uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right], \tag{1}$$

chamada série de Fourier de f.

A função f dada em (1) é periódica com período $T = 2L$ e os coeficiente satisfazem

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \quad \forall m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \quad \forall m = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Convergência da Série de Fourier

Na aula de hoje, vamos admitir que temos uma função periódica f com período $T = 2L$. Vamos admitir também que podemos calcular os coeficientes a_m e b_m usando (2) e (3).

Nosso objetivo é saber se a série de Fourier de f converge de fato para a função f num ponto x.

Em outras palavras, conhecendo os coeficientes a_m e b_m, determinamos a função f?

Existem funções cujas séries de Fourier não convergem para o valor da função em certos pontos.

Podemos garantir a convergência, em particular, considerando funções seccionalmente contínuas.

Definição 1 (Função Seccionalmente Contínua)

Uma função f é dita seccionalmente contínua em um intervalo $[a, b]$ se existe um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, chamada **partição do intervalo** $[a, b]$, tal que

1. f é contínua em cada um dos subintervalos $x_{i-1} < x < x_i$.
2. Os limites laterais nas extremidades de cada subintervalo existem e são finitos.

Teorema 2 (Teorema da Convergência)

Seja f uma função periódica com período $T = 2L$. Se f e f' são seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$, então a série de Fourier de f

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right],$$

com a_m e b_m dados respectivamente por (2) *e* (3), *está bem definida e satisfaz*

$$s(x) = \frac{1}{2}\left[\lim_{\xi \to x^+} f(\xi) + \lim_{\xi \to x^-} f(\xi) \right], \quad \forall x.$$

Em palavras, $s(x)$ é o valor médio dos limites à esquerda e à direita de f em x.

Exemplo 3

A série de Fourier da função periódica f, com período $T = 6$, definida por

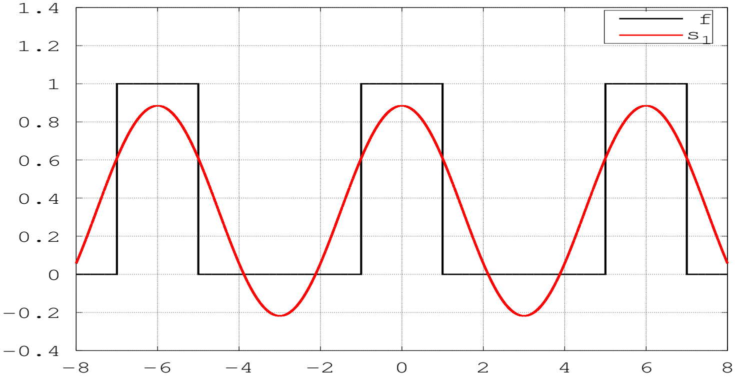
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq +1, \\ 0, & +1 < x < 3, \end{cases} \qquad \forall x \in [-3.3],$$

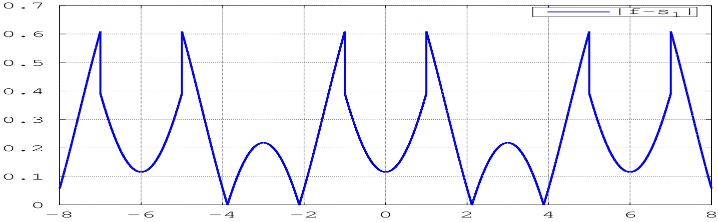
é

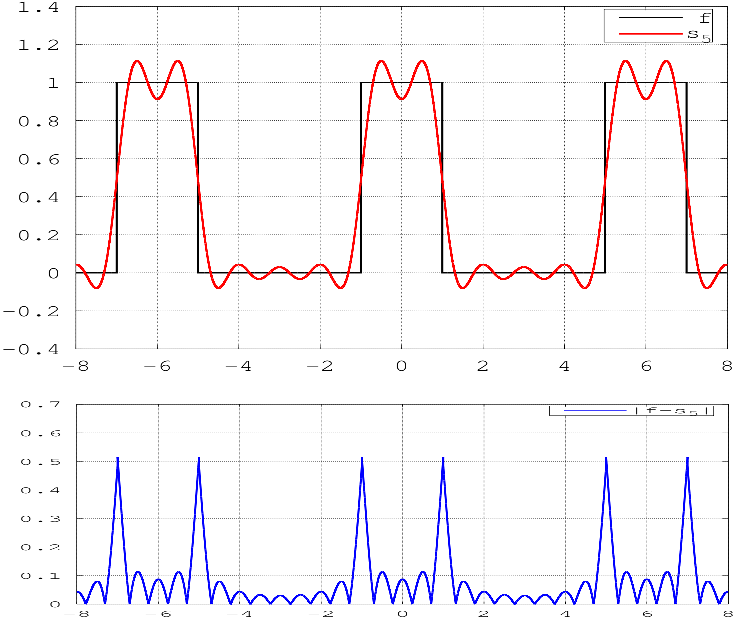
$$f(x) \equiv s(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$

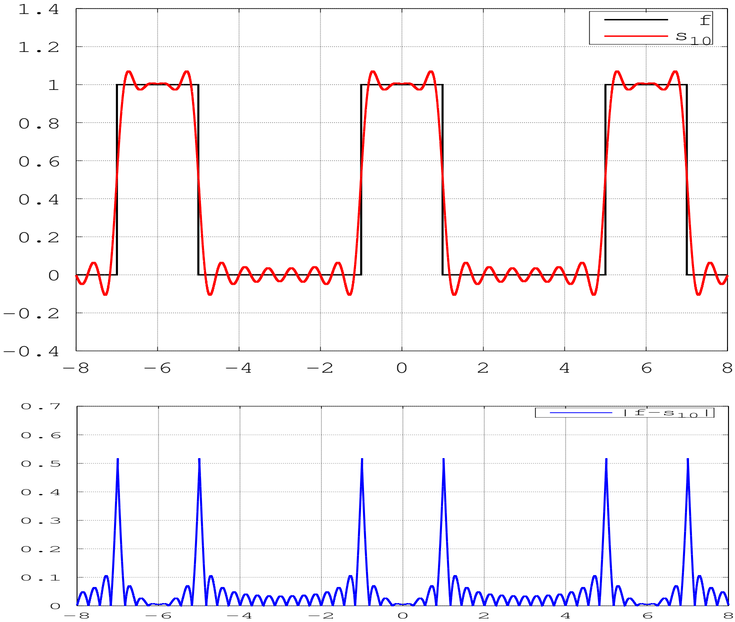
Nos próximas folhas apresentamos f (preto), s_n (vermelho), e o erro absoluto $|f - s_n|$ (azul), em que

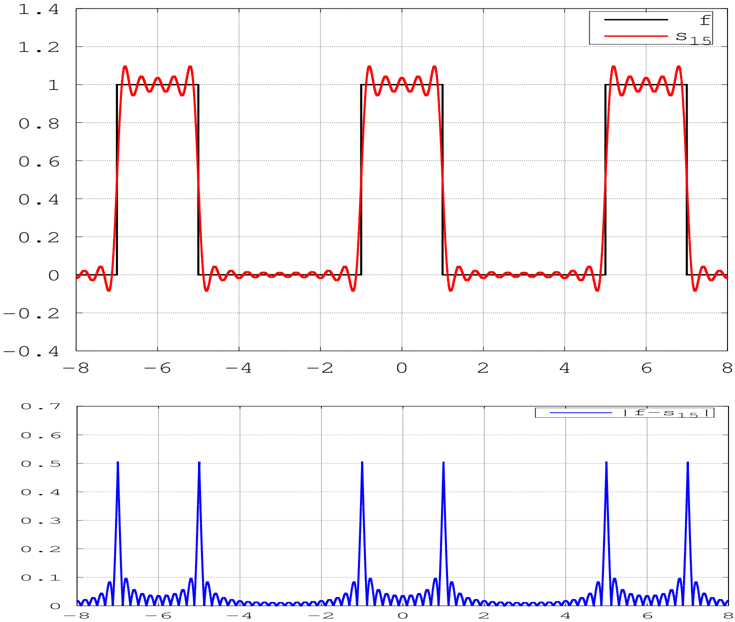
$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$

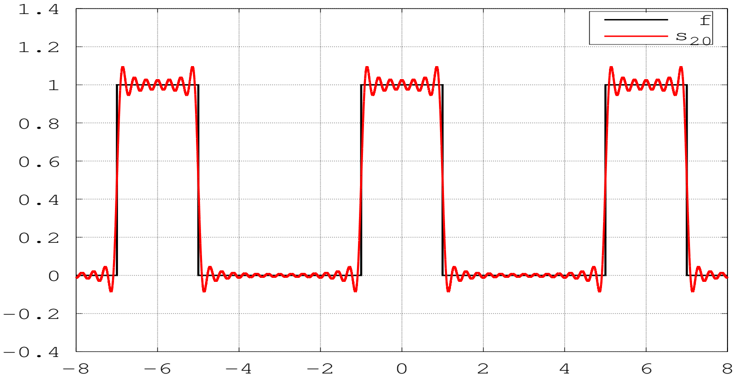

f
s_1
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

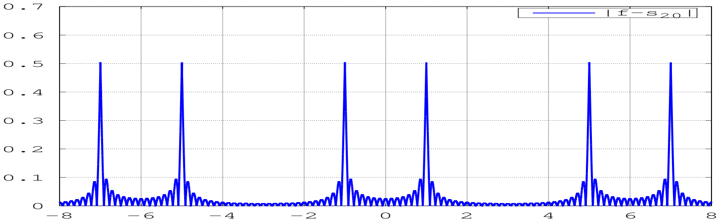

$|f-s_1|$
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

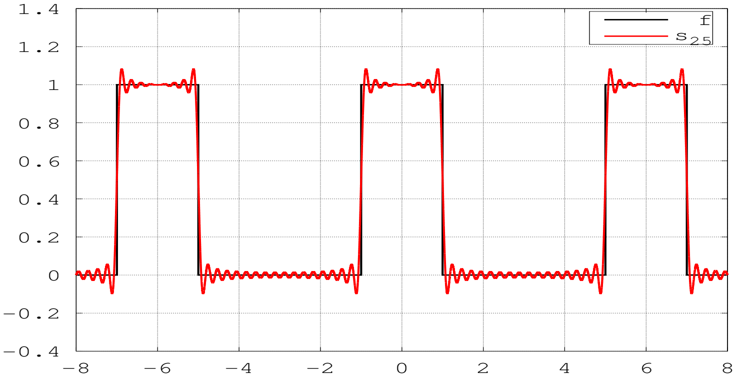

f
s5
|f−s5|
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0


f
s10
|f−s10|
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
0.7
0.6
0.5
0.3
0.1
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

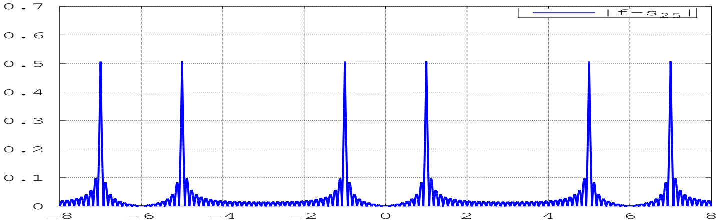

f
s15
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
|f−s15|
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8


f
s_{20}
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

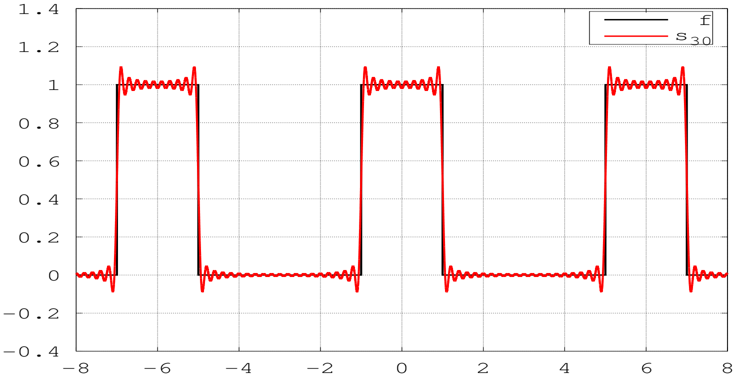

$|f-s_{20}|$
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

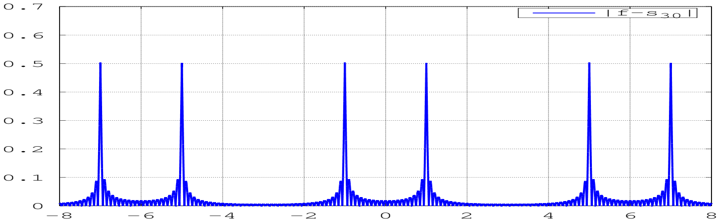


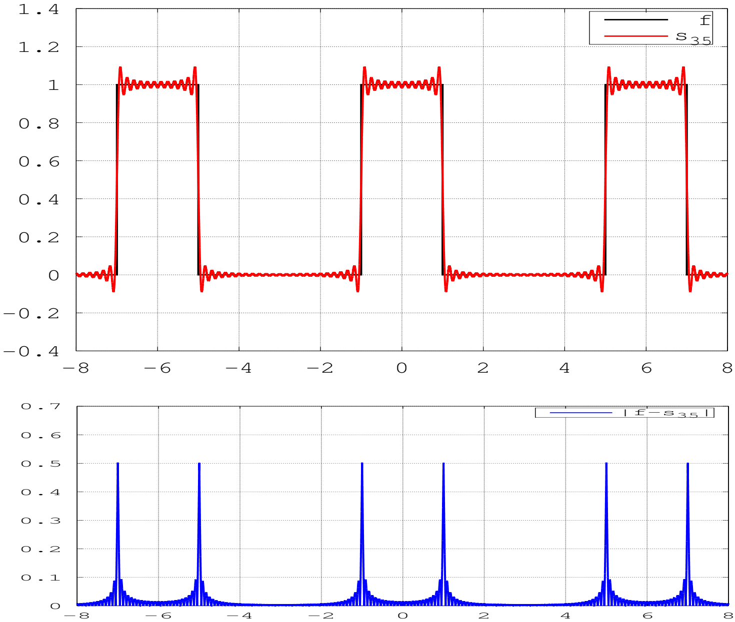
f
s25
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

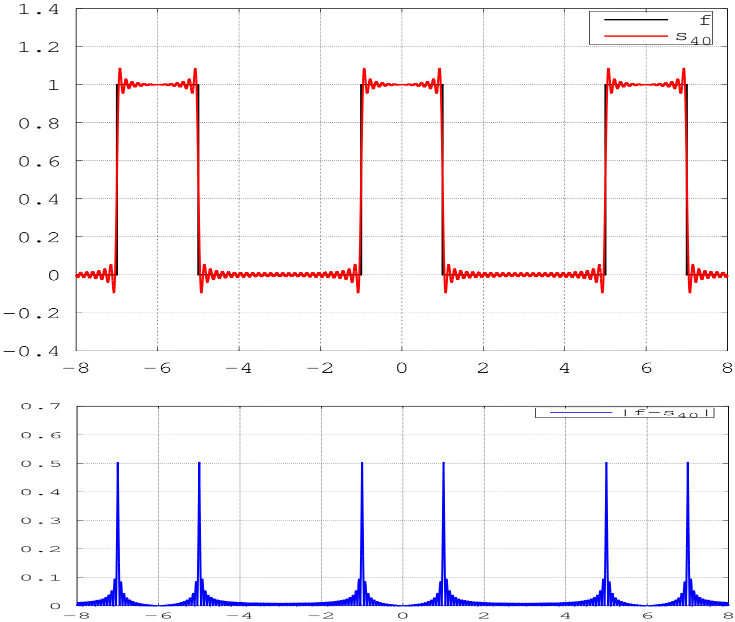


|f−s25|
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
f
s30


0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
|f−s30|


f
s_{35}
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8
$|f - s_{35}|$
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8



1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8
f
s_{40}
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8
$|f - s_{40}|$

Observação

Apesar de $s_n(x)$ convergir para o valor médio dos limites à esquerda e à direita de f em um ponto x, observamos que a série de Fourier apresenta oscilações próximas aos pontos de descontinuidade de f.

Essas oscilações são referidas como **fenômeno de Gibbs**.

Estudos sobre o fenômeno de Gibbs podem ser encontrados em livros textos especializados em análise de Fourier.

Funções Pares e Ímpares

Definição 4

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita:

- **par**, se $f(-x) = f(x)$.
- **ímpar**, se $f(-x) = -f(x)$.

Cuidado:

Uma função f pode não ser par nem ímpar!

Operações com Funções Pares e Ímpares

A soma/diferença e o produto/quociente de funções pares e ímpares satisfazem as seguintes tabelas:

Soma/Diferença

	par	ímpar
par	par	—
ímpar	—	ímpar

Produto/Quociente

	par	ímpar
par	par	ímpar
ímpar	ímpar	par

Teorema 5

- *Se f é uma função par, então* $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx.$
- *Se f é uma função ímpar, então* $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0.$

Definição 6 (Série de Fourier em Cossenos)

A série de Fourier em cossenos de uma função f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \tag{4}$$

A série de Fourier em cossenos define uma função par!

Teorema 7

A série de Fourier de f coincide com a série de Fourier em cossenos se e somente se f for uma função par. Nesse caso, os coeficientes satisfazem

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \quad \forall m = 0, 1, \ldots.$$

Definição 8 (Série de Fourier em Senos)

A série de Fourier em senos de uma função f é

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \tag{5}$$

A série de Fourier em senos define uma função ímpar!

Teorema 9

A série de Fourier de f coincide com a série de Fourier em senos se e somente se f for uma função ímpar. Nesse caso, os coeficientes satisfazem

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall m = 1, \ldots .$$

Exemplo 10

Seja $f(x) = x$, para $0 < x \leq L$. Defina f no restante da reta de modo a ser periódica com período $T = 2L$. Encontre a série de Fourier desta função admitindo:

(a) f é par.

(b) f é ímpar.

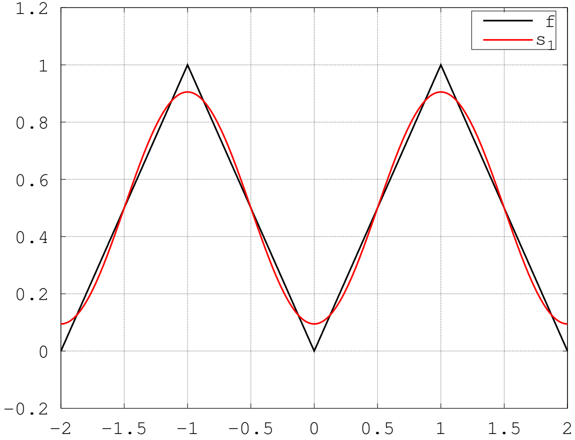
Resposta:

(a) Se f é uma função par, então a série de Fourier de f coincide com a série de Fourier em cossenos:

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right).$$

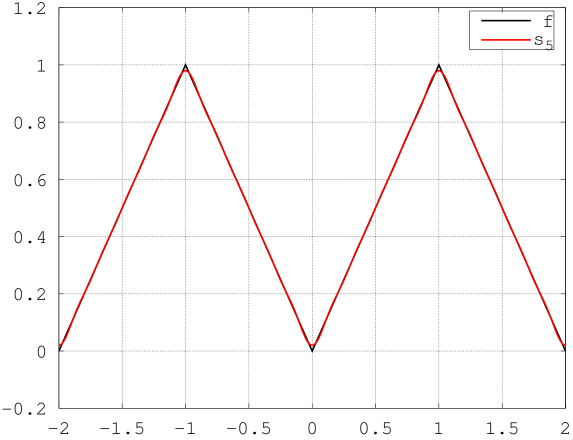
(b) Se f é uma função ímpar, então a série de Fourier de f coincide com a série de Fourier em senos:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



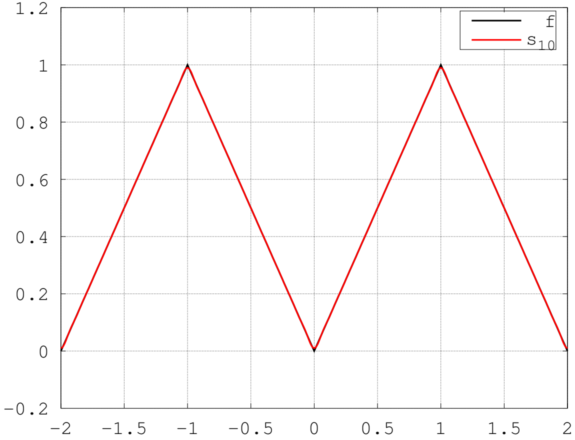
Extensão periódica **par** de f com $L = 1$:

$$s_n = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L} \right).$$



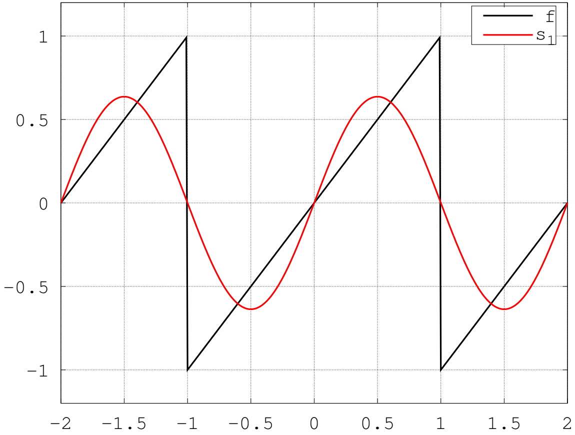
Extensão periódica **par** de f com $L = 1$:

$$s_n = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right).$$



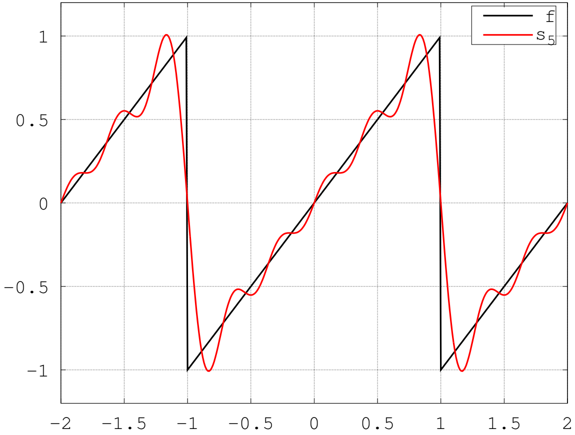
Extensão periódica **par** de f com $L = 1$:

$$s_n = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L} \right).$$



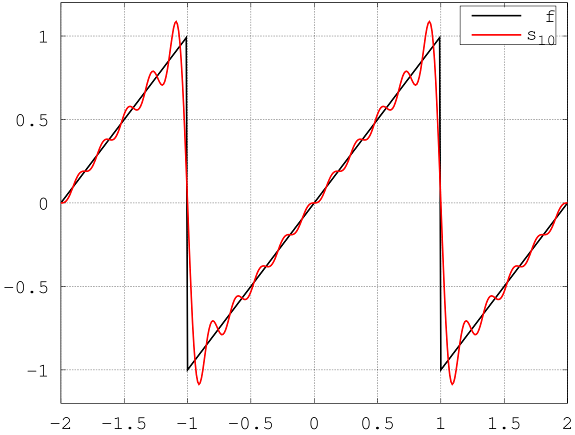
Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



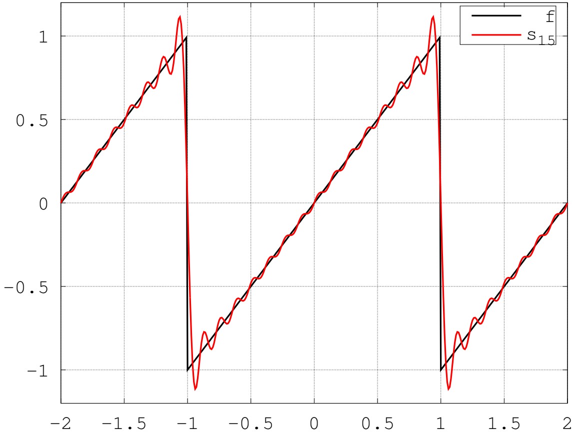
Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



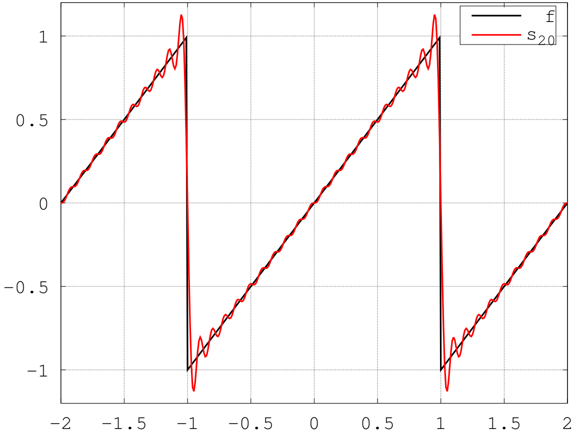
Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



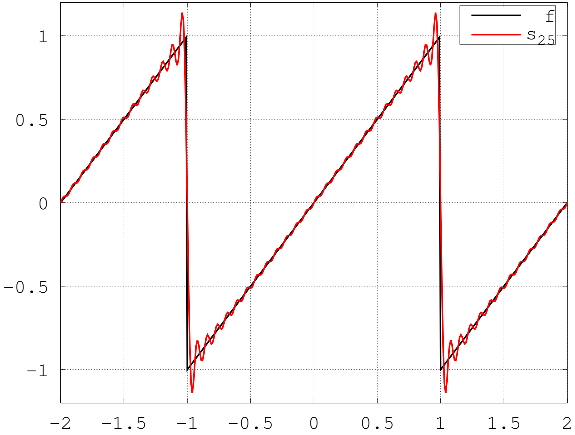
Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



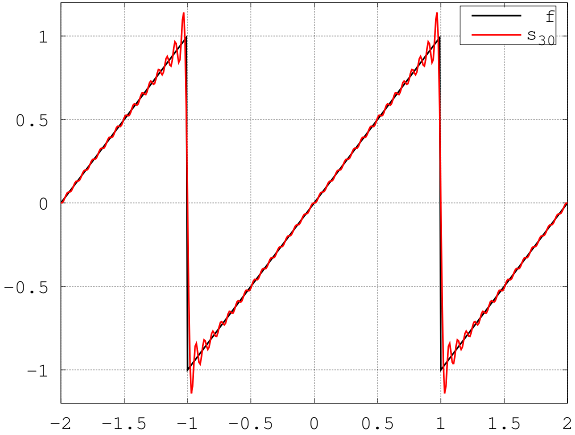
Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



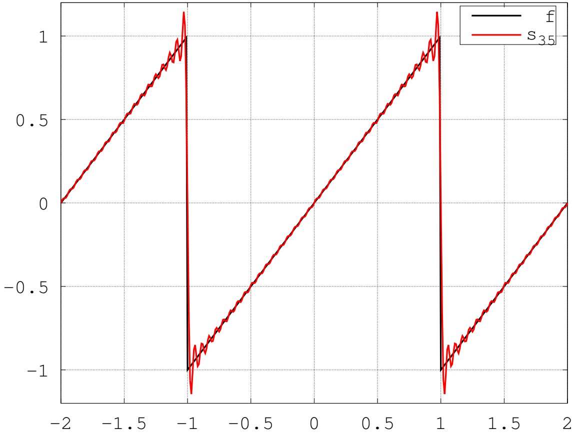
Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



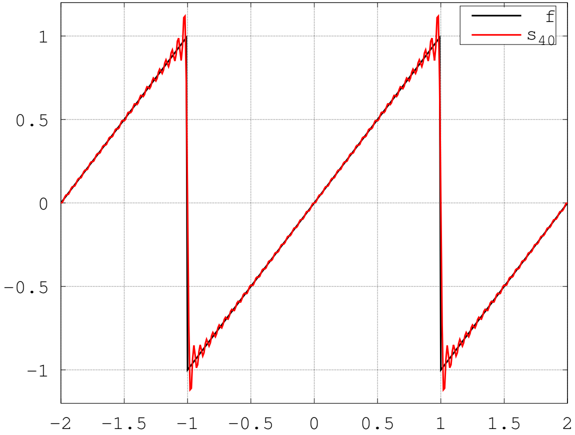
Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



Extensão periódica **ímpar** de f com $L = 1$:

$$s_n = f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos vários resultados e discutimos diversas propriedades das séries de Fourier.

Destacamos, em particular, que a série de Fourier coincide com a série de Fourier em cossenos (senos) se e somente se f for uma função par (ímpar).

Também comentamos sobre a convergência de série de Fourier e ilustramos o chamado fenômeno de Gibbs.

Muito grato pela atenção!