Cálculo III

Aula 23 – Séries de Fourier.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Vimos anteriormente como resolver uma equação diferencial ordinária usando uma série de potências.

No estudo de equações diferenciais parciais, como a equação do calor, surgem naturalmente um tipo diferente de série, chamada **série de Fourier**.

Além da resolução de equações diferenciais, as séries de Fourier possuem aplicações em engenharia elétrica, análise de vibrações, processamento de imagens e sinais, física quântica, econometria, entre muitas outras áreas.

Definição 1 (Série de Fourier)

Uma série de Fourier é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right],$$

em que $L > 0$ é um parâmetro e a_0, a_m e b_m, para $m = 1, 2, \ldots$, são os coeficientes.

Nos pontos em que a série de Fourier converge, ela define uma função f que satisfaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right],$$

chamada série de Fourier de f.

Funções Periódicas

Definição 2

Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é **periódica** com período $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}. \tag{1}$$

O menor valor de T para o qual (1) é válida é chamado **período fundamental** de f.

Exemplo 3

As funções

$$\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad m = 1, 2, \dots,$$

são funções periódicas com período $T = 2L/m$.

Teorema 4

Se $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ são funções periódicas com período T, então

$$s(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x),$$

também é periódica com período T.

O resultado acima também vale para uma série convergente.

Teorema 5

A função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right],$$

é periódica com período $T = 2L$

Produto Interno e Funções Ortogonais

Definição 6 (Produto Interno e Funções Ortogonais)

O produto interno usual de duas funções f e g no intervalo $a \leq x \leq b$ é definido pela equação

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Duas funções f e g são ditas ortogonais em $a \leq x \leq b$ se

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Um conjunto de funções $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ é um conjunto ortogonal se $\left\langle f_i, f_j \right\rangle = 0$ sempre que $i \neq j$.

Teorema 7 (Ortogonalidade de Seno e Cosseno)

As funções $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ *e* $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, *para* $m = 1, 2, \ldots$, *formam um conjunto ortogonal no intervalo* $-L \leq x \leq L$. *Com efeito, tem-se*

$$\langle \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_n \rangle = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n, \end{cases}$$

$$\langle \mathcal{C}_m, \mathcal{S}_n \rangle = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall m, n,$$

$$\langle \mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n \rangle = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n, \end{cases}$$

em que

$$\mathcal{C}_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad e \quad \mathcal{S}_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \forall m = 1, 2, \ldots.$$

Fórmulas de Euler-Fourier

Teorema 8 (Fórmulas de Euler-Fourier)

Se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right],$$

está bem definida e pode ser integrada termo a termo, então

$$a_m = \frac{\langle f, \mathcal{C}_m \rangle}{\langle \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_m \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_m = \frac{\langle f, \mathcal{S}_m \rangle}{\langle \mathcal{S}_m, \mathcal{S}_m \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall m = 1, 2, \ldots.$$

Exemplo 9

Determine, admitindo sua existência, a série de Fourier da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x+4) = f(x).$$

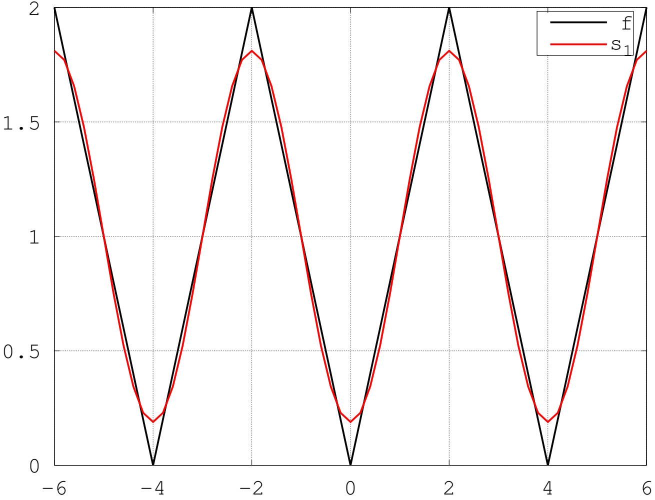
Exemplo 9

Determine, admitindo sua existência, a série de Fourier da função f definida por

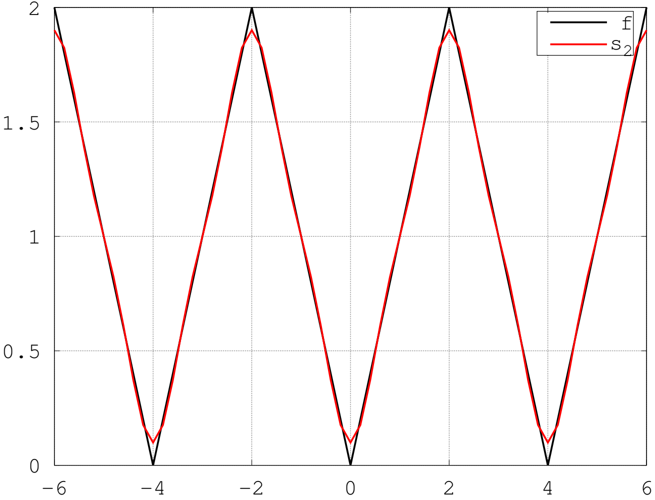
$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x+4) = f(x).$$

Resposta: A série de Fourier de f é

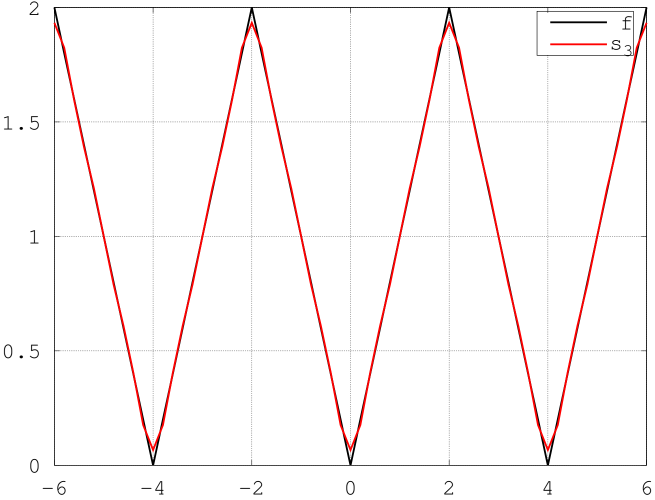
$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}.$$



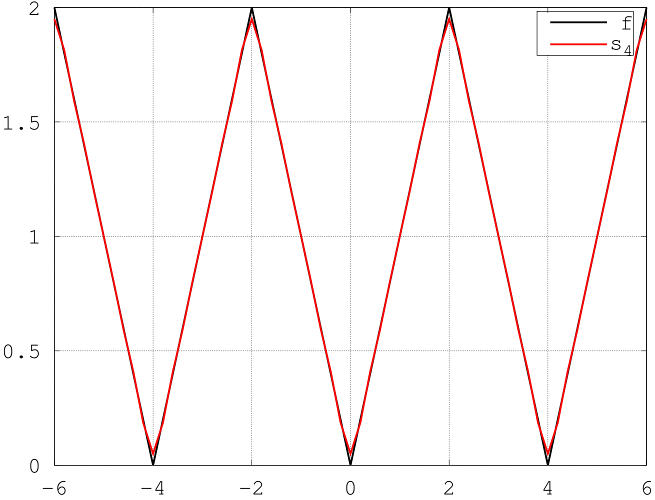
$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$



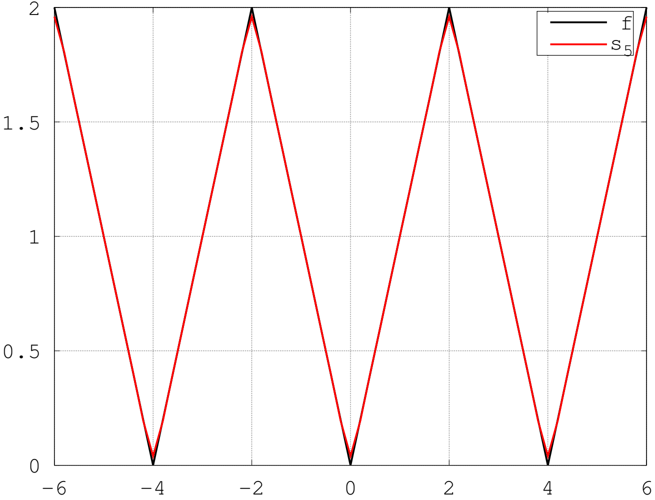
$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$



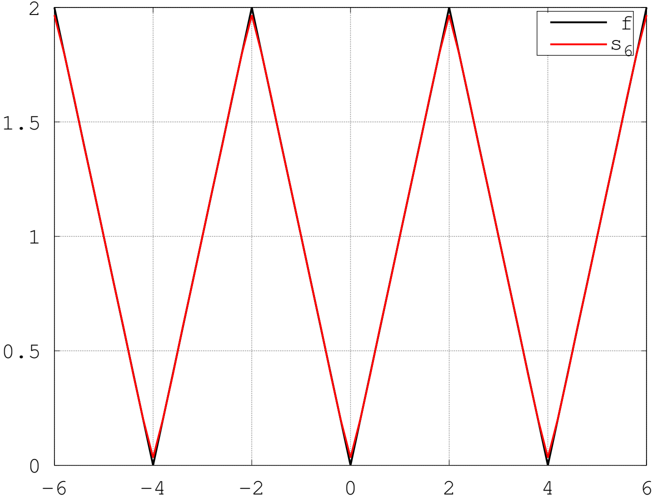
$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$



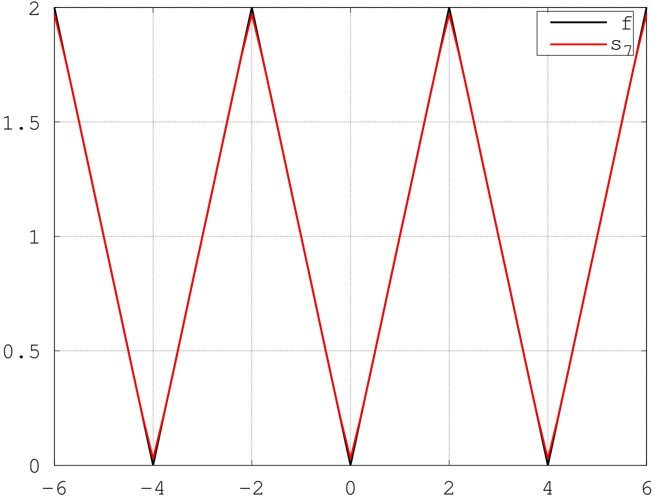
$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$



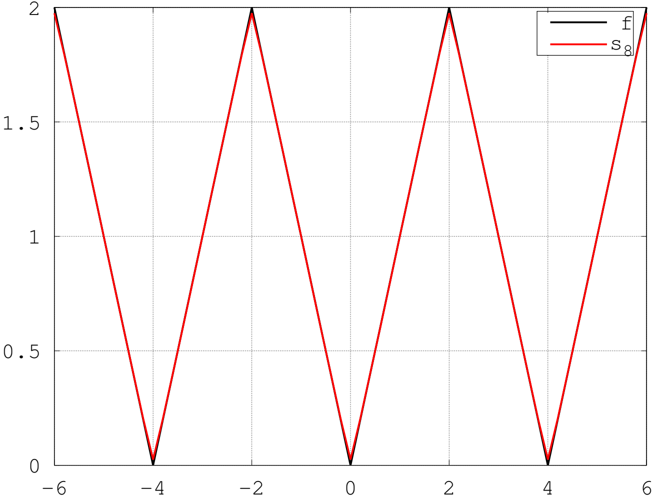
$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$



$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$



$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$



$$s_n(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$

Exemplo 10

Determine, admitindo sua existência, a série de Fourier da função f definida por

$$f(x+6) = f(x) \quad \text{e} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < +1, \\ 0, & +1 \leq x < 3, \end{cases}$$

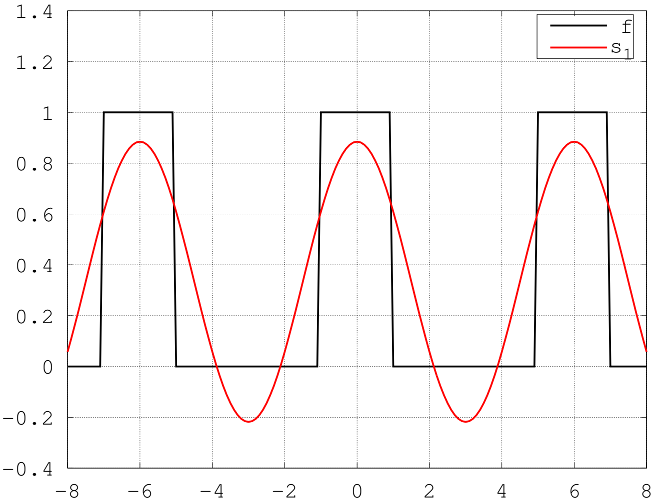
Exemplo 10

Determine, admitindo sua existência, a série de Fourier da função f definida por

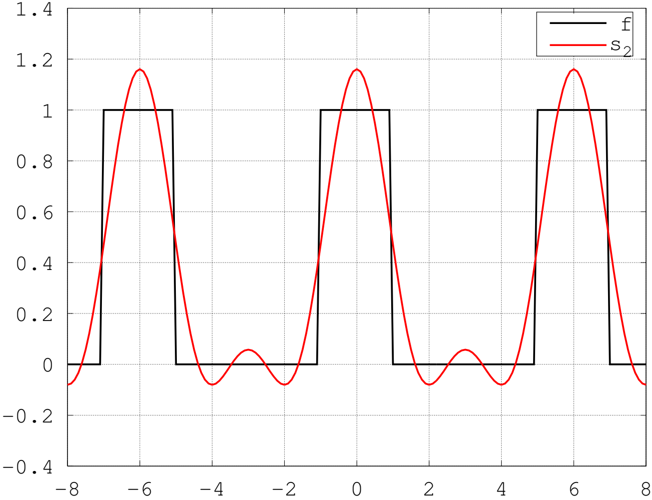
$$f(x+6) = f(x) \quad \text{e} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < +1, \\ 0, & +1 \leq x < 3, \end{cases}$$

Resposta: A série de Fourier de f é

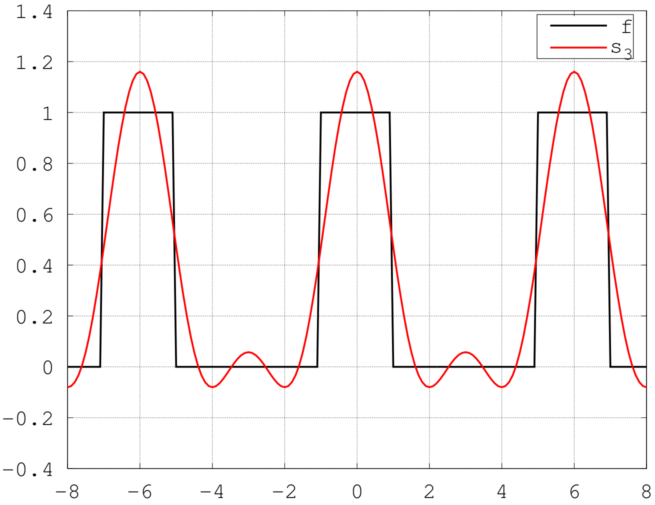
$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



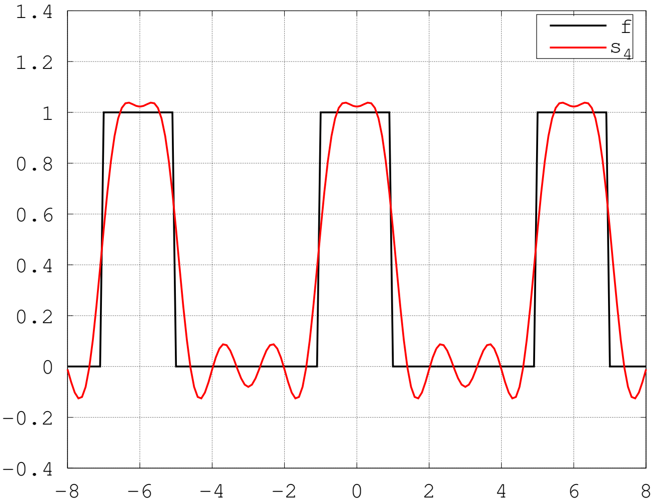
$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



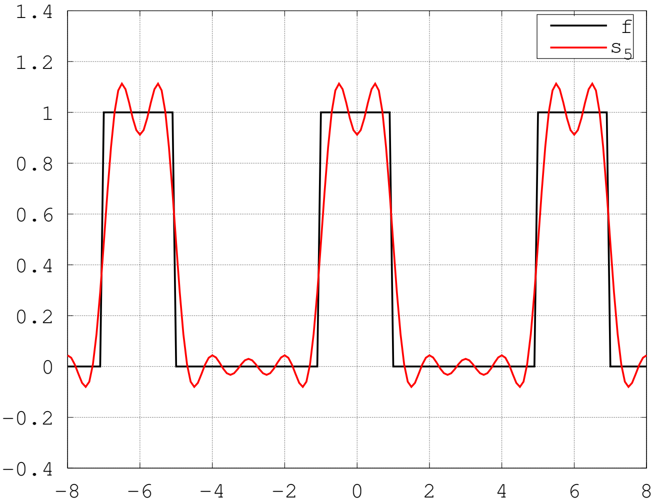
$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



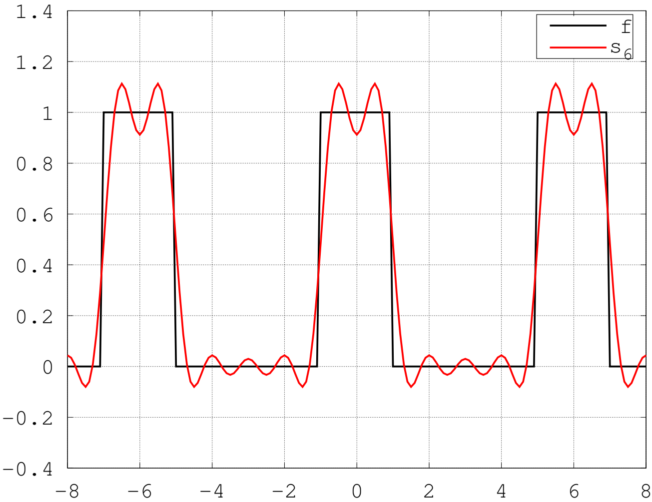
$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



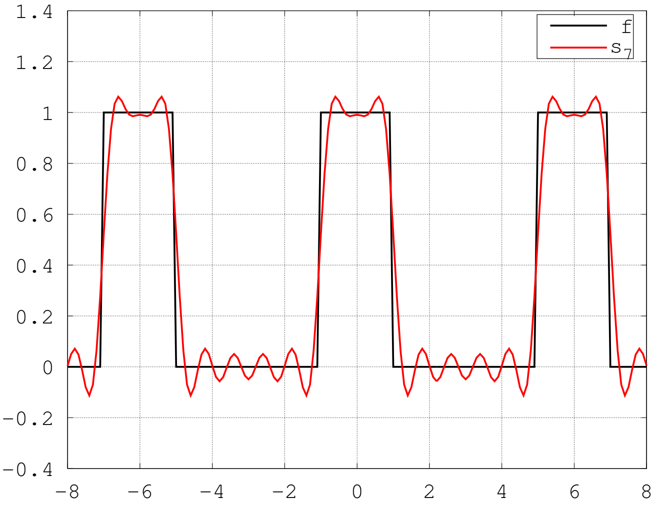
$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



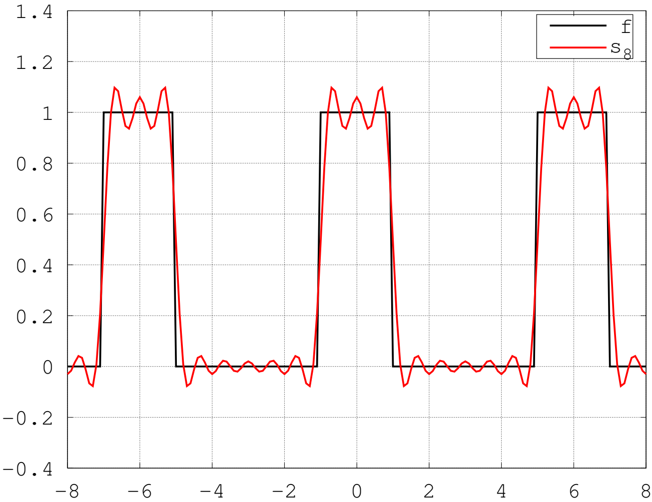
$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$



$$s_n(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$

Considerações Finais

A série de Fourier de uma função real f periódica com período fundamental $T = 2L$, quando bem definida, é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right],$$

em que

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall m = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall m = 1, 2, \ldots.$$

Muito grato pela atenção!