Cálculo III

Aula 22 – Matriz Fundamental e o Método da Variação de Parâmetros.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

A estrutura da solução de um sistema de equações diferenciais

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x},$$

fica mais clara usando o conceito de matriz fundamental.

Com efeito, usaremos esse conceito para apresentar o método da variação de parâmetros para a solução de um sistema não-homogêneo

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x} + \mathbf{g}(t).$$

Matriz Fundamental

Considere um sistema de equações diferenciais lineares

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

em que $\mathbf{P}(t)$ é uma matriz de dimensão $n \times n$ cujas componentes são funções de t.

Se $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}$ são soluções linearmente independentes, então a matriz

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{x}^{(1)} & \boldsymbol{x}^{(2)} & \ldots & \boldsymbol{x}^{(n)} \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

cujas colunas são as soluções fundamentais é chamada **matriz fundamental** de (1).

Propriedades da Matriz Fundamental

A matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ é invertível pois suas colunas são linearmente independentes. Além disso, seu determinante é o Wronskiano.

Como cada coluna de $\boldsymbol{\Psi}(t)$ é uma solução do sistema $\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x}$, concluímos que $\boldsymbol{\Psi}$ satisfaz a equação diferencial matricial

$$\boldsymbol{\Psi}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi},$$

em que $\boldsymbol{\Psi}'$ é obtida derivando cada entrada de $\boldsymbol{\Psi}$.

Se a matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui n auto-vetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ linearmente independentes associados aos auto-valores $r_1, r_2, \ldots, r_n$, então

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{\xi}^{(k)} e^{r_k t}, \quad \text{para } k = 1, \ldots, n,$$

é solução do sistema linear com coeficientes constantes

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

Nesse caso, a matriz fundamental é

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t} & \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 t} & \ldots & \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n t} \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

Sabemos que as soluções do sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x},$$

são

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz fundamental do sistema é

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Problema de Valor Inicial

Sabemos que a solução geral de $\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x}$ é

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \ldots + c_n\boldsymbol{x}^{(n)}.$$

Usando a matriz fundamental, podemos escrever a solução geral como

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c},$$

em que $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$ é um vetor constante.

Para um problema de valor inicial

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,$$

temos

$$\boldsymbol{\Psi}(t_0)\mathbf{c} = \boldsymbol{x}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{c} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0.$$

Logo, a única solução do PVI é

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0.$$

Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

sabendo que a matriz fundamental do sistema é

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

sabendo que a matriz fundamental do sistema é

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Resposta: Temos que

$$\boldsymbol{\Psi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Psi}^{-1}(0) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4e^{5t} \\ -9e^{-2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Exponencial de uma Matriz

Sabemos que a solução de

$$x' = kx \quad \text{e} \quad x(0) = x_0,$$

é a função

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Em analogia, podemos dizer que a solução do PVI

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

é

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0.$$

Com base nos resultados anteriores, temos que

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(0).$$

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui n auto-vetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ linearmente independentes associados aos auto-valores $r_1, r_2, \ldots, r_n$, então

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} & \ldots & \boldsymbol{\xi}^{(n)} \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{r_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} & \ldots & \boldsymbol{\xi}^{(n)} \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1}.$$

Algumas propriedades da exponencial de números reais ou complexos também valem para a exponencial de uma matriz. Por exemplo,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\boldsymbol{A}t}\right] = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}.$$

Outras propriedades, porém, devem ser vistas com cuidado. Por exemplo, a identidade

$$e^{\boldsymbol{A}+\mathbf{B}} = e^{\boldsymbol{A}}e^{\mathbf{B}},$$

é verdadeira se $\boldsymbol{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\boldsymbol{A}$.

Método da Variação de Parâmetros

Considere um sistema não-homogêneo

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x} + \mathbf{g}(t),$$

e suponha que

$$\boldsymbol{x}_h(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c},$$

é solução geral do sistema homogêneo associado $\boldsymbol{x}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{x}$,em que $\mathbf{c}$ é um vetor constante.

No método da variação de parâmetros, buscamos uma solução particular da forma

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{u}(t),$$

em que $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)]^T$ é um vetor que depende de t.

Derivando $\boldsymbol{x}_p(t)$, substituindo no sistema não-homogêneo e lembrando que $\boldsymbol{\Psi}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}$, obtemos

$$\boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t),$$

ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = \int \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau,$$

em que a integral é calculada componente-a-componente.

A solução geral do sistema não-homogêneo é

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t) \\ &= \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c} + \boldsymbol{\Psi}(t)\int \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Exemplo 3

Encontre a solução geral do sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix},$$

cuja matriz fundamental do sistema homogêneo é

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3

Encontre a solução geral do sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix},$$

cuja matriz fundamental do sistema homogêneo é

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Resposta: Temos que

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \\ t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t} \end{bmatrix},$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje mostramos que a solução geral de um sistema de equações diferenciais lineares homogêneo $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$ é dado por

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{c},$$

em que $\boldsymbol{\Psi}(t)$ é a matriz fundamental do sistema e $\boldsymbol{c}$ é constante. A solução do problema de valor inicial $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ é

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}_0.$$

Finalmente, usando o método da variação de parâmetros temos que a solução geral do sistema não-homogêneo $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$ é

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c} + \boldsymbol{\Psi}(t)\int \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

Muito grato pela atenção!