Cálculo III

Aula 21 – Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Revisão da aula anterior

Na aula anterior, iniciamos o estudo de sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes, que podem ser escritos como

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

em que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz e $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ é um vetor cujas componentes $x_j \equiv x_j(t)$ são funções de t.

A derivada $\boldsymbol{x}'$ é obtida derivando cada componente do vetor $\boldsymbol{x}$, ou seja, $\boldsymbol{x}' = [x_1', x_2', \ldots, x_n']^T$.

Lembre-se que o problema de valor inicial

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,$$

admite uma única solução para todo $t \in \mathbb{R}$ e para qualquer condição inicial $\boldsymbol{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}]^T \in \mathbb{R}^n$.

Resolução

Para a resolução de um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes, buscamos uma solução da forma

$$\boldsymbol{x} = \xi e^{rt}.$$

Derivando e substituindo na equação, concluímos que $\boldsymbol{\xi}$ é um auto-vetor de $\boldsymbol{A}$ associado ao auto-valor r, ou seja, devemos ter

$$\boldsymbol{A}\xi = r\boldsymbol{\xi}.$$

Se a matriz $\boldsymbol{A}$ possui auto-vetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ linearmente independentes, então a solução geral do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ é

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t} + \ldots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}.$$

Exemplo 1

A solução geral do sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, em que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

é

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t},$$

pois temos os auto-vetores

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

associados aos auto-valores $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$, respectivamente.

Plano e Retrato de Fase

Podemos obter informações qualitativas das soluções de um sistema com 2 equações e duas incógnitas x_1 e x_2 usando o chamado **plano de fase**.

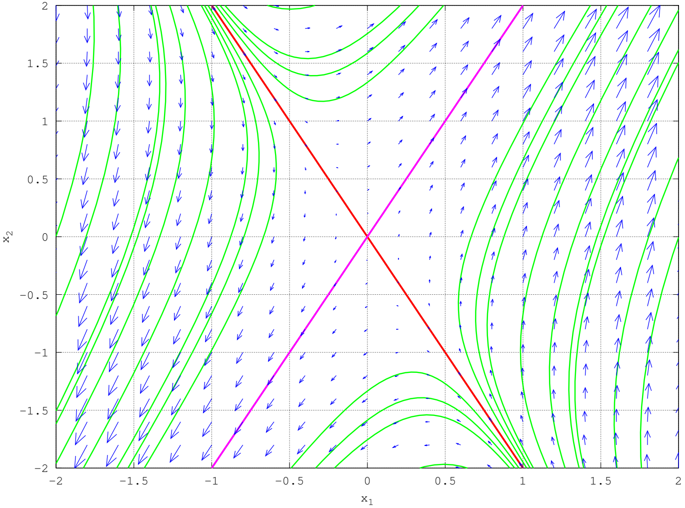
No plano de fase, esboçamos uma solução no plano cujos eixos são as variáveis dependentes x_1 e x_2.

Uma curva no plano de fase é chamada **trajetória**.

Num plano de fase, também esboçamos **campos de direção** definidos pelo termo do lado direito do sistema.

Um gráfico contendo uma amostra significativa de trajetórias é chamado **retrato de fase**.

A figura abaixo mostra o plano de fase do sistema do Exemplo 1.



As retas indicam as direções dos auto-vetores e as curvas representam trajetórias.

Exemplo 2

Encontre a solução geral do sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Exemplo 2

Encontre a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Resposta: O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é

$$p(r) = r^2 + r + \frac{5}{4}.$$

Os auto-valores são (raízes do polinômio característico) são

$$r_1 = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\lambda} + i \underbrace{1}_{\mu} \quad \text{e} \quad r_2 = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\lambda} - i \underbrace{1}_{\mu}$$

Os auto-vetores são

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} + i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}},$$

e

$$\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} - i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}},$$

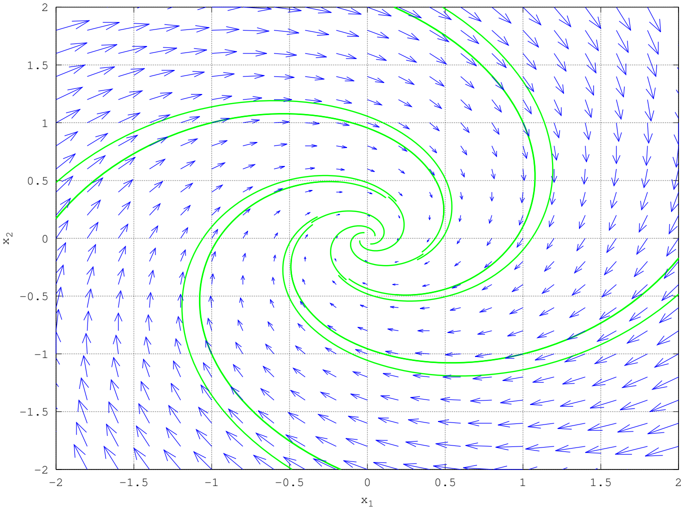
A solução geral é

$$\boldsymbol{x} = k_1 e^{(-\frac{1}{2}+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + k_2 e^{(-\frac{1}{2}-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\boldsymbol{x} = c_1 \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}}_{\mathbf{u(t)}} + c_2 \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}}_{\mathbf{v(t)}}.$$

A figura abaixo mostra plano de fase do sistema do Exemplo 2.



A origem é um ponto de espiral estável (atrator).

Auto-valores Complexos

De um modo geral, se a matriz $\boldsymbol{A}$ do sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ possui auto-valores complexos

$$r_1 = \lambda + \mu i \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - \mu i,$$

então os auto-valores associados são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i.$$

Com isso,

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos(\mu t) - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}(\mu t))$$

e

$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\,\mathrm{sen}(\mu t) + \mathbf{b}\cos(\mu t)),$$

são ambas soluções reais e aparecem na solução geral do sistema:

$$\boldsymbol{x} = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) + c_3 e^{r_3 t}\boldsymbol{\xi}^{(3)} + \ldots + c_n e^{r_n t}\boldsymbol{\xi}^{(n)}.$$

Exemplo 3

Encontre um conjunto fundamental (solução geral) do sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Exemplo 3

Encontre um conjunto fundamental (solução geral) do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Resposta: O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é

$$p(r) = r^2 - 4r + 4.$$

O auto-valor é $r = 2$, com multiplicidade algébrica 2, e o auto-valor associado é

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, uma solução do sistema é

$$\mathbf{x}^{(1)} = \boldsymbol{\xi} e^{rt} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Para encontrar uma segunda solução, admitimos

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} t e^{rt} + \boldsymbol{\eta} e^{rt}.$$

Substituindo no sistema e lembrando que $\boldsymbol{\xi}$ é um auto-vetor, obtemos

$$(A - rI)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}.$$

Resolvendo esse sistema linear, encontramos nesse exemplo

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

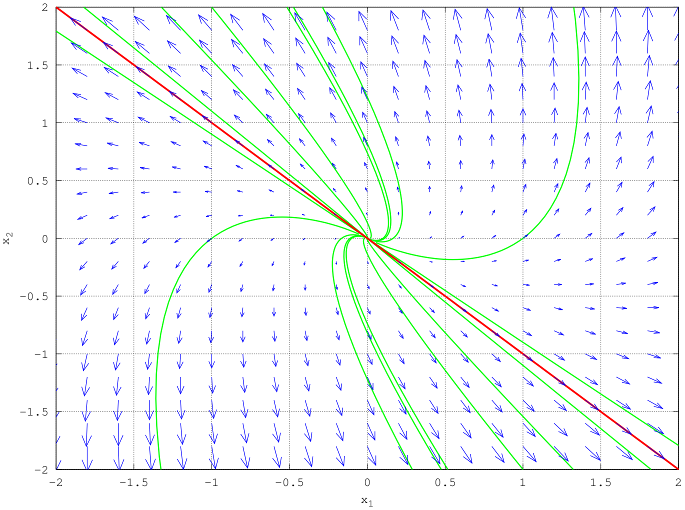
para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, podemos escolher $k = 0$. Assim, a segunda solução é

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{\xi} t e^{rt} + \boldsymbol{\eta} e^{rt} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

A solução geral do sistema é:

$$\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + c_2 \boldsymbol{x}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} \right).$$

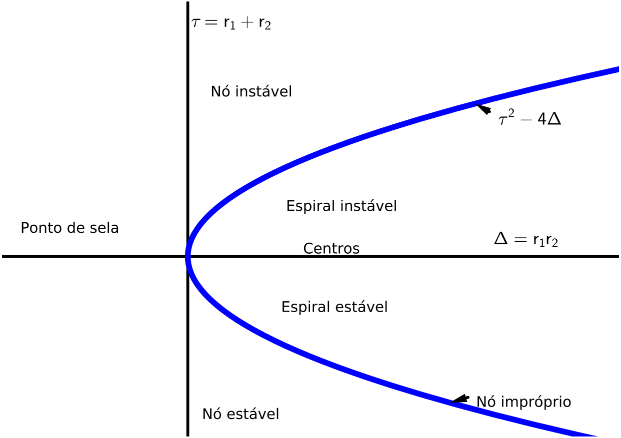
A figura abaixo mostra plano de fase do sistema do Exemplo 3.



A origem é um nó impróprio. A reta vermelha representa o auto-vetor ξ.

Classificação de Sistemas Lineares de Dimensão 2

A origem de um sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ de dimensão 2 é classificado da seguinte forma onde r_1 e r_2 denotam os auto-valores de $\boldsymbol{A}$.



Considerações Finais

Na aula de hoje estudamos sistemas de equações diferenciais descritos pela equação

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Se a matriz $\boldsymbol{A}$ possui auto-vetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ linearmente independentes, então a solução geral de (1) é

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{r_1 t} \boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2 e^{r_2 t} \boldsymbol{\xi}^{(2)} \ldots + c_n e^{r_n t} \boldsymbol{\xi}^{(n)},$$

em que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são os auto-valores associados aos auto-vetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$, respectivamente.

Se a matriz $\boldsymbol{A}$ do sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ possui auto-valores complexos

$$r_1 = \lambda + \mu i \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - \mu i,$$

então os auto-valores associados são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i.$$

Com isso,

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos(\mu t) - \mathbf{b}\,\text{sen}(\mu t))$$

e

$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\,\text{sen}(\mu t) + \mathbf{b}\cos(\mu t)),$$

são ambas soluções reais e aparecem na solução geral do sistema:

$$\boldsymbol{x} = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) + c_3 e^{r_3 t}\boldsymbol{\xi}^{(3)} + \ldots + c_n e^{r_n t}\boldsymbol{\xi}^{(n)}.$$

Se r_1 é um auto-valor de $\boldsymbol{A}$ com multiplicidade 2, então uma solução é

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{\xi} e^{r_1 t},$$

em que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ é o auto-vetor associado à r_1. A outra solução linearmente independente é

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{\xi}^{(1)} t e^{r_1 t} + \boldsymbol{\eta}^{(2)} e^{rt},$$

em que $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ é tal que

$$(A - r_1 I)\boldsymbol{\eta}^{(2)} = \boldsymbol{\xi}^{(1)}.$$

A solução geral do sistema é

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{r_1 t} \boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2 \left(\boldsymbol{\xi}^{(1)} t e^{r_1 t} + \boldsymbol{\eta}^{(2)} e^{rt} \right) + \ldots + c_n e^{r_n t} \boldsymbol{\xi}^{(n)},$$

Muito grato pela atenção!