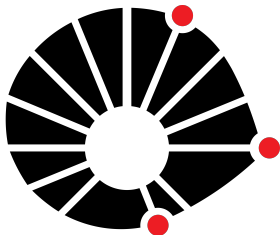


# Cálculo III

## Aula 17 – Soluções em Série na Vizinhança de um Ponto Singular Regular.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle  
Depart. Matemática Aplicada  
IMECC – Unicamp

## Ponto Ordinário e Singular

---

Na aula de hoje, continuaremos nosso estudo sobre a resolução de uma EDO linear de segunda ordem homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

usando série de potências.

---

De um modo geral, dizemos que uma função  $f$  é analítica em  $x_0$  se ela admite uma expansão em série centrada em  $x_0$  com raio de convergência  $R_f > 0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_f.$$

---

Usando essa terminologia, dizemos que  $x_0$  é um **ponto ordinário** de (1) se  $p$  e  $q$  são analíticas em  $x_0$ . Caso contrário, dizemos que  $x_0$  é um **ponto singular** de (1).

## Solução em Série Próximo de um Ponto Ordinário

---

Na última aula vimos que se  $x_0$  é um ponto ordinário, então todas as soluções de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

podem ser representadas em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R,$$

em que  $0 < R = \min\{R_p, R_q\}$ ,  $R_p$  e  $R_q$  são os raios de convergência de  $p$  e  $q$ , respectivamente .

---

Na aula de hoje veremos que podemos aplicar uma metodologia semelhante quando  $x_0$  é um tipo especial de ponto singular, chamado **ponto singular regular**.

## Ponto Singular Regular e Irregular

---

Um ponto singular  $x_0$  de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

é dito **singular regular** se as funções

$$\bar{p}(x) = (x - x_0)p(x) \quad \text{e} \quad \bar{q}(x) = (x - x_0)^2q(x),$$

são ambas analíticas em  $x_0$ , ou seja, podemos escrever

$$\bar{p}(x) = (x - x_0)p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_p,$$

e

$$\bar{q}(x) = (x - x_0)^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_q.$$

---

Um ponto singular que não é regular é chamado **ponto singular irregular**.

# Propriedades de um Ponto Singular Regular

---

Se  $x_0$  é um ponto singular regular, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x) = p_0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x) = q_0,$$

em que  $p_0$  e  $q_0$  são os primeiros termos da expansão em série das funções  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$ .

---

Sobretudo, ambos limites existem e são finitos!

## Exemplo 1

Determine e classifique os pontos singulares da equação

$$2x(x - 2)^2 y'' + 3xy' + (x - 2)y = 0.$$

# Propriedades de um Ponto Singular Regular

---

Se  $x_0$  é um ponto singular regular, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x) = p_0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x) = q_0,$$

em que  $p_0$  e  $q_0$  são os primeiros termos da expansão em série das funções  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$ .

---

Sobretudo, ambos limites existem e são finitos!

## Exemplo 1

Determine e classifique os pontos singulares da equação

$$2x(x - 2)^2 y'' + 3xy' + (x - 2)y = 0.$$

**Resposta:** Temos que  $x = 0$  é um ponto singular regular enquanto que  $x = 2$  é um ponto singular irregular.

## Solução Próximo de um Ponto Singular Regular

Suponha que  $x_0 = 0$  é um ponto singular regular de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Multiplicando a equação por  $x^2$ , obtemos

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

que, substituindo  $xp(x)$  e  $x^2q(x)$  por  $p_0$  e  $q_0$ , respectivamente, relembra a equação de Euler cuja solução é  $y(x) = x^r$ ,  $x > 0$ .

Em vista disso, admitimos que a solução pode ser escrita como

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \text{ com } a_0 \neq 0 \text{ e } \forall x > 0.$$

Se  $x_0 \neq 0$ , efetuamos uma mudança de variável  $t = x - x_0$  ou  $t = x_0 - x$  de modo que  $t_0 = 0$  é ponto singular regular e estudamos a solução para  $t > 0$ .

## Exemplo 2

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0.$$



## Exemplo 2

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0.$$

**Resposta:** Derivando  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$  obtemos a **equação indicial**

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \iff (r-1)(2r-1) = 0,$$

cujas raízes são  $r_1 = 1$  e  $r_2 = 1/2$ , chamados **exponentes na singularidade**. Além disso, temos a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \quad \forall n \geq 1.$$

Para  $r = r_1 = 1$ , encontramos

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} a_0, \quad \forall n \geq 1.$$

Logo, uma solução é

$$y_1(x) = x \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^n \right], \quad \forall x > 0.$$

Para  $r = r_2 = 1/2$ , encontramos

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, \quad \forall n \geq 1.$$

Portanto, uma segunda solução é

$$y_2(x) = x^{1/2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n \right], \quad \forall x > 0.$$

Finalmente, a solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad \forall x > 0.$$

# Método de Frobenius

---

Suponha que  $x_0 = 0$  é ponto singular regular da EDO

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0.$$

Sejam  $r_1$  e  $r_2$ , com  $r_1 \geq r_2$ , raízes da equação indicial

$$F(r) = r(r - 1) + p_0 r + q_0,$$

em que

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x).$$

# Primeira Solução

---

Admitindo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad 0 < x < R,$$

encontramos uma solução da forma

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right], \quad 0 < x < R,$$

em que os coeficientes  $a_n$  satisfazem a relação de recorrência

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

com  $a_0 = 1$  e  $r = r_1$ .

## Raízes distintas que não diferem por um inteiro

---

Se  $r_1 - r_2$  não é zero nem um inteiro positivo, então uma segunda solução linearmente independente é dada por

$$y_2(x) = x^{r_2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n \right], \quad 0 < x < R,$$

em que os coeficientes  $a_n$  satisfazem a mesma relação de recorrência

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

com  $a_0 = 1$  mas  $r = r_2$ .

## Raízes repetidas ou diferindo por um inteiro positivo

---

Se  $r_1 = r_2$ , então uma segunda solução linearmente independente é obtida admitindo

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < R.$$

Se  $r_1 - r_2 = N$ , um inteiro positivo, então uma segunda solução linearmente independente é obtida admitindo

$$y_2(x) = c_0 y_1(x) \ln x + x^{r_2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right]. \quad 0 < x < R.$$

Nas expressões acima, os coeficientes  $b_n$  e  $c_n$  podem ser obtidos substituindo na EDO a expressão para  $y_2$ .

### Exemplo 3

Determine as duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem zero

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0,$$

a direita de  $x_0 = 0$ .

### Observação

A equação de Bessel de ordem  $\nu$  é

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

### Exemplo 3

Determine as duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem zero

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0,$$

a direita de  $x_0 = 0$ .

### Observação

A equação de Bessel de ordem  $\nu$  é

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

**Resposta:** A relação indicial é

$$F(r) = r(r - 1) + r = r^2 = 0 \quad \implies \quad r_1 = r_2 = 0,$$

portanto, temos raízes repetidas.



Admitindo

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x > 0,$$

obtemos  $a_1 = 0$  e a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Logo,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} a_0 \quad \text{e} \quad a_{2m+1} = 0, \quad \forall m = 1, 2, \dots$$

Portanto, uma solução, chamada **função de Bessel de primeira espécie de ordem zero**, é

$$J_0(x) \equiv y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad \forall x > 0.$$

Admitindo

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \forall x > 0.$$

Derivando e substituindo na EDO obtemos a relação de recorrência

$$b_1 + 4b_2x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2 b_n + b_{n-2}]x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1}.$$

Logo, para  $m = 1, 2, \dots$ , temos

$$b_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \quad \text{e} \quad b_{2m-1} = 0.$$

Portanto, uma segunda solução linearmente independente, chamada **função de Bessel de segunda espécie de ordem zero**, é

$$Y_0(x) \equiv y_2(x) = J_0(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{2n}.$$

## Considerações Finais

---

Na aula de hoje, apresentamos o método de Frobenius para resolução por séries em torno de um ponto singular regular.

---

Especificamente, se  $x_0 = 0$  é ponto singular regular da EDO

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0,$$

então admitimos uma solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \text{ com } a_0 \neq 0 \text{ e } \forall x > 0,$$

em que  $r$  é uma raiz da equação indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0, \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x).$$

Muito grato pela atenção!