Cálculo III

Aula 18 – Soluções em Série Próximo de um Ponto Ordinário.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Ponto Ordinário e Singular

Na aula de hoje, vamos retomar o estudo de métodos para resolver uma EDO linear de segunda ordem homogênea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Dizemos que x_0 é um **ponto ordinário** de (1) se p e q admitem uma representação em séries de potências, ou seja, podem ser escritas como

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_p,$$

e

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_q,$$

com $R_p > 0$ e $R_q > 0$. Caso contrário, dizemos que x_0 é um **ponto singular** de (1).

Solução em Série Próximo de um Ponto Ordinário

Se x_0 é um ponto ordinário, então todas as soluções da EDO podem ser representadas em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R,$$

em que $0 < R = \min\{R_p, R_q\}$.

O objetivo será determinar os coeficientes a_n, $n = 0, 1, ...$, que caracterizam uma solução da EDO.

Exemplo 1

Encontre uma solução em série de potências para a equação

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

em torno de $x_0 = 0$.

Resolução: Admitindo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, encontramos a relação de recorrência

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Equivalentemente, para $k = 0, 1, 2, ...$, temos as expressões

$$a_{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} a_0 \quad \text{e} \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1 .$$

Portanto,

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

é a solução geral da EDO.

Exemplo 2

Encontre uma solução em série de potências da equação de Airy

$$y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

em torno de $x_0 = 0$.

Exemplo 2

Encontre uma solução em série de potências da equação de Airy

$$y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

em torno de $x_0 = 0$.

Resposta: Admitindo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, encontramos $a_2 = 0$ e

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Portanto,

$$y(x) = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \ldots \right]$$
$$+ a_1 \left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \ldots \right]$$

Procedimento Geral

Os coeficientes $\{a_n\}$ de uma solução da EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

em que

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n,$$

satisfazem, para todo $n = 0, 1, \ldots$, a relação de recorrência

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1) p_{n-k} a_{k+1} + q_{n-k} a_k \right].$$

As duas soluções linearmente independentes podem ser obtidas considerando os casos:

- $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$.
- $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

Exemplo 3

Determine a relação de recorrência que define a expansão em série de potências da solução da EDO

$$y'' + e^{2x} y' + e^{x} y = 0.$$

Exemplo 3

Determine a relação de recorrência que define a expansão em série de potências da solução da EDO

$$y'' + e^{2x}y' + e^{x}y = 0.$$

Resposta: A relação de recorrência é

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-k)!}\Big[2^{n-k}(k+1)a_{k+1} + a_k\Big]\right).$$

Considerações Finais

Dizemos que x_0 é um **ponto ordinário** da EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

se p e q adimitem uma representação em séries de potências

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n.$$

Nesse caso, as soluções linearmente independentes da EDO adimitem representação em série de potências da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

em que os coeficientes satisfazem a relação de recorrência

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-k)!} \Big[2^{n-k}(k+1)a_{k+1} + a_k \Big] \right).$$