Cálculo III

Aula 17 – Representação de Funções em Séries de Potência.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Revisão

Uma **série de potências** centrada em a ou em torno de a é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots,$$

em que x é uma variável, a é fixo e os coeficientes c_n's são constantes.

Uma série de potências define uma função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

cujo domínio é o conjunto de todos os pontos para os quais a série converge, que inclui o ponto $x = a$.

Exemplo 1 (Série Geométrica)

Sabemos que a série geométrica satisfaz

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall\, |x| < 1.$$

Temos assim a representação em série de potências da função

$$f(x) = 1/(1-x).$$

O intervalo de convergência da série geométrica é $(-1, 1)$.

Exemplo 2

Expresse a função

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

como uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

Exemplo 2

Expresse a função

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

como uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

Resposta: Substituindo x por $-x^2$ na série geométrica, encontramos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \forall |x| < 1.$$

Tal como a série geométrica, o intervalo de convergência da série de potências de $f(x)$ é $(-1, 1)$.

Exemplo 3

Encontre uma representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2},$$

e determine o intervalo de convergência.

Exemplo 3

Encontre uma representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2},$$

e determine o intervalo de convergência.

Resposta: Usando a série geométrica, temos que

$$f(x) = \frac{x^3}{2}\frac{1}{1-(-x/2)} = \frac{x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}, \forall |x/2| < 1.$$

O intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Teorema 4 (Derivação e Integração Termo à Termo)

Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$*, então a função*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

é diferenciável no intervalo $|x-a| < R$ *e*

- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}, \quad \forall |x-a| < R.$
- $\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad \forall |x-a| < R.$

Exemplo 5

Expresse a função

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

como uma série de potências e encontre o raio de convergência.

Exemplo 5

Expresse a função
$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$
como uma série de potências e encontre o raio de convergência.

Resposta: Derivando a série geométrica
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall |x| < 1,$$
encontramos
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad \forall |x| < 1.$$
O raio de convergência é $R = 1$.

Exemplo 6

Encontre uma representação em série de potências para

$$f(x) = \ln(1 - x),$$

e determine o raio de convergência.

Exemplo 6

Encontre uma representação em série de potências para

$$f(x) = \ln(1 - x),$$

e determine o raio de convergência.

Resposta: Integrando a série geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall |x| < 1,$$

concluímos que

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall |x| < 1.$$

O raio de convergência é $R = 1$.

Teorema 7

Se f tiver uma representação (ou expansão) em série de potências em a, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R,$$

então seus coeficientes satisfazem

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Série de Taylor e de Maclaurin

Definição 8 (Série de Taylor)

A série de Taylor de uma função f centrada em a é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < R.$$

Em particular, quando $a = 0$, tem-se:

Definição 9 (Série de Maclaurin)

A série de Maclaurin de uma função f é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad |x| < R.$$

Exemplo 10

Encontre a série da Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

Exemplo 10

Encontre a série da Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

Resposta: Temos
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
O raio de convergência é $R = \infty$.

Teorema 11

Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Definição 12 (Polinômio de Taylor)

O polinômio de Taylor de grau n de f em a é

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Teorema 13

Suponha que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, em que T_n é o polinômio de Taylor de grau n de f e R_n é o resto. Se

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall |x-a| < R,$$

então f é igual à soma de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

Teorema 14

Suponha que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$*, em que* T_n *é o polinômio de Taylor de grau* n *de* f *e* R_n *é o resto. Se* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ *para todo* $|x - a| \leq d$*, então*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \quad \forall |x-a| \leq d.$$

Exemplo 15

Os polinômios de Taylor de grau $n = 1, 2, 3$ de e^x em $a = 0$ são

$$T_1(x) = 1 + x, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

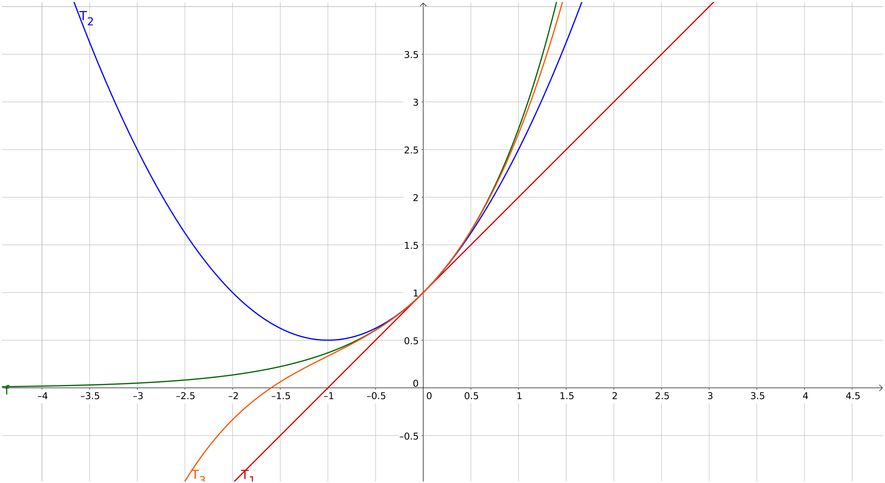
Note que

$$R_n(x) \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}, \quad \forall |x| \leq d.$$

Portanto, em $x = 1$, temos temos

$$R_1(1) \leq \frac{e}{2} = 1.3591,$$
$$R_2(1) \leq \frac{e}{6} = 0.45305,$$
$$R_3(1) \leq \frac{e}{24} = 0.11326.$$

Aproximações de e^x por T_1, T_2 e T_3.



Exemplo 16

Encontre a série de Maclaurin de $\operatorname{sen}(x)$ e demonstre que ela representa $\operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 16

Encontre a série de Maclaurin de $\operatorname{sen}(x)$ e demonstre que ela representa $\operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

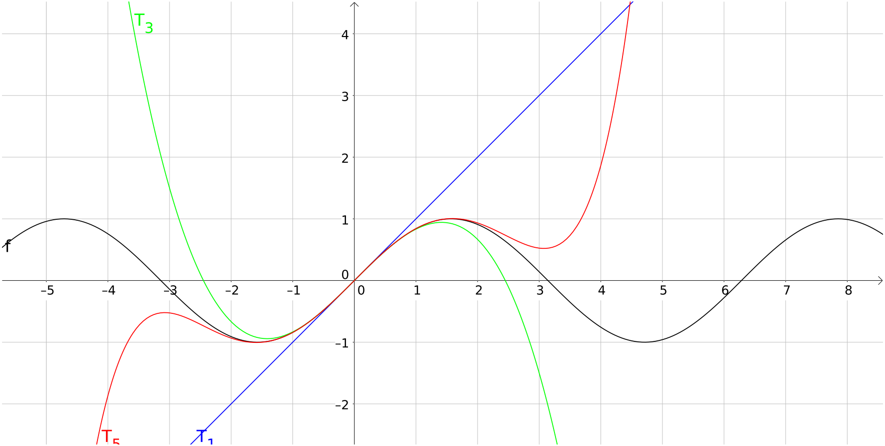
Resposta: Temos

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

O resto satisfaz, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Aproximações de $\operatorname{sen}(x)$ por T_1, T_3 e T_5.



Exemplo 17

Encontre a série de Maclaurin de $\cos(x)$.

Exemplo 17

Encontre a série de Maclaurin de $\cos(x)$.

Resposta: Temos

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje exploramos a representação de uma função em termos de uma série de potências. Destacamos que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ então

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad \text{e} \quad \int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1},$$

para todo $|x-a| < R$.

Destacamos também que a série de Taylor e de Maclaurin de f, quando existem, são dadas por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Muito grato pela atenção!