Cálculo III

Aula 16 – Séries Alternadas e Séries de Potência.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Revisão

A soma dos n primeiros termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

é chamada **soma parcial**.

Uma **série infinita**, ou simplesmente **série**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

é obtida somando todos os termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dizemos que a série $\sum a_n$ **converge** se a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais for convergente. Caso contrário, dizemos que a série **diverge**.

Série Alternada

Uma **série alternada** é aquela cujos termos alternam entre positivos e negativos. Em geral, podemos escrever uma série alternada como

$$\sum (-1)^n b_n \quad \text{ou} \quad \sum (-1)^{n+1} b_n,$$

em que b_n são todos não-negativos.

Teorema 1 (Teste da Série Alternada)

Se uma série alternada satisfizer

1. $b_n \geq b_{n+1}$, *para todo* $n > N$,
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

então a série ***converge***.

Exemplo 2

Avalie a convergência da série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Exemplo 2

Avalie a convergência da série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Resposta: Como

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

pelo teste da série alternada temos que a série converge.

Exemplo 3

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n}{4n-1}$.

Exemplo 3

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n}{4n-1}$.

Resposta: Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1},$$

não existe, pelo teste da divergência concluímos que a série diverge.

Exemplo 4

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

Exemplo 4

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

Resposta: Como

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

pelo teste da série alternada temos que a série converge.

Séries de Potências

Uma **série de potências** centrada em a ou em torno de a é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots,$$

em que x é uma variável, a é fixo e os coeficientes c_n's formam uma sequência (constante com respeito à x).

Uma série de potências define uma função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

cujo domínio é o conjunto de todos os pontos para os quais a série converge, que inclui o ponto $x = a$.

Exemplo 5

Para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

Exemplo 5

Para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

Resposta: Primeiro, observe que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}} \right| = |x-3|.$$

Logo, pelo teste da razão, a série converge se $|x-3| < 1$, ou seja, $2 < x < 4$.

Vamos estudar $|x-3| = 1$, ou seja, $x = 2$ ou $x = 4$. Para $x = 2$, temos a série harmônica alternada $\displaystyle\sum \frac{(-1)}{n}$ que é convergente. Para $x = 4$, temos a série harmônica $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$, que diverge.

Concluindo, a série de potências converge para $2 \leq x < 4$.

Exemplo 6

Para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

Exemplo 6

Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

Resposta: Pelo teste da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty, \forall x \neq 0.$$

Logo, a série converge apenas para $x = 0$.

Exemplo 7

Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Exemplo 7

Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

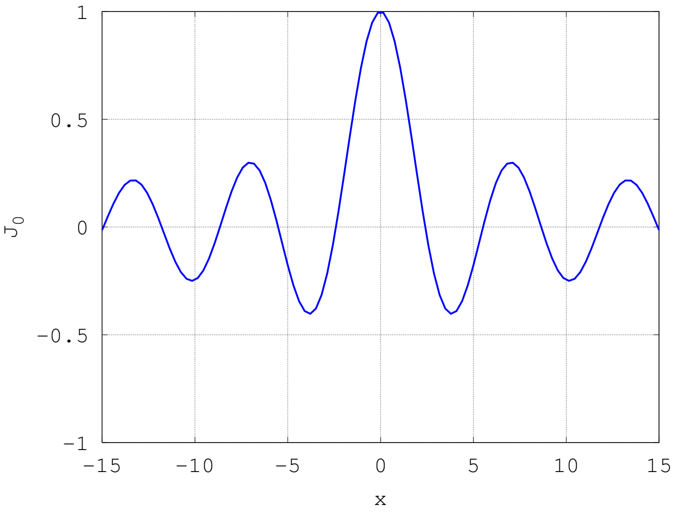
$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Resposta: Primeiro, observe que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1!)^2}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}} \right| = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, pelo teste da razão, a série converge todo x, ou seja, o domínio da função de Bessel J_0 é $\mathbb{R}$.

Gráfico da Função de Bessel de Ordem 0



Teorema 8

Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$*, existem apenas três possibilidades:*

1. *Existe* $R > 0$*, chamado* ***raio de convergência****, tal que a série converge se* $|x-a| < R$ *e diverge se* $|x-a| > R$*.*
2. *A série converge apenas quando* $x = a$*. Nesse caso, dizemos que o raio de convergência é* $R = 0$*.*
3. *A série converge para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Nesse caso, dizemos que o raio de convergência é* $R = \infty$*.*

O **intervalo de convergência** de uma série é o conjunto dos pontos para os quais a série converge.

Série	Raio de Convergência	Intervalo de Convergência
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, +\infty)$

Exemplo 9

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Exemplo 9

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Resposta: Primeiro, pelo teste da razão temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{(-3)^n \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}} = 3|x| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 3|x| < 1.$$

Portanto, o raio de convergência é $R = \frac{1}{3}$.
Vamos agora avalia a série nos pontos $x = 1/3$ e $x = -1/3$.

- Para $x = 1/3$, temos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},$$

  que é convergente (pelo teste da série alternada).

- Para $x = -1/3$, tomando $k = n+1$ na última equação, encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(-3)^n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}},$$

  que é uma p-série com $p = 1/2$. Logo, diverge.

Concluindo, o intervalo de convergência da série é $(-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}]$.

Exemplo 10

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Exemplo 10

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Resposta: O raio de convergência é $R = 3$ e o intervalo de convergência é $(-5, 1)$.

Considerações Finais

Uma série alternada pode ser escrita como

$$\sum (-1)^n b_n \quad \text{ou} \quad \sum (-1)^{n+1} b_n,$$

em que b_n são todos não-negativos. Uma série alternada converge se

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n \geq b_{n+1}, \forall n > N.$$

Uma **série de potências** centrada em a é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots.$$

O **intervalo de convergência** de uma série de potências é o conjunto dos pontos x para os quais a série converge. O raio de convergência, denotado por R, é tal que a série converge quando $|x-a| < R$.

Muito grato pela atenção!