# Cálculo III

## Aula 15 – Testes de Convergência.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

# Revisão

A soma dos $n$ primeiros termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

é chamada **soma parcial**.

Uma **série infinita**, ou simplesmente **série**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

é obtida somando todos os termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dizemos que a série $\sum a_n$ **converge** se a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais for convergente. Caso contrário, dizemos que a série **diverge**.

## Teorema 1

*Se $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergem, então as séries*

$$\sum ca_n, \quad \sum(a_n + b_n) \quad e \quad \sum(a_n - b_n),$$

*também convergem e valem as identidades:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

# Teste para Divergência

**Teorema 2**

*Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Teorema 3 (Teste para Divergência)**

*Se* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *não existe ou se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

## Exemplo 4

Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4},$$

converge ou diverge.

## Exemplo 4

Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4},$$

converge ou diverge.

**Resposta:** Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

pelo teste da divergência, a série diverge.

# Teste da Integral

## Teorema 5 (Teste da Integral)

*Suponha que $f$ seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$. Se $a_n = f(n)$, então*

- *Se $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ for* ***convergente****, então $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$* ***converge****.*
- *Se $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ for* ***divergente****, então $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$* ***diverge****.*

**Cuidado:** Se $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ for convergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ **converge** mas não garantimos $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n = \int_1^\infty f(x)dx$.

## Exemplo 6

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à sua convergência ou divergência.

## Exemplo 6

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à sua convergência ou divergência.

**Resposta:** Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4},$$

concluímos pelo teste da integral que a série converge.

## Exemplo 7

Determine se a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

converge ou diverge.

## Exemplo 7

Determine se a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

converge ou diverge.

**Resposta:** Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln(x)\Big|_1^{\infty} = +\infty,$$

concluímos que a série diverge pelo teste da integral.

## Exemplo 8

Para quais valores de $p$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, chamada $p$-série, converge?

## Exemplo 8

Para quais valores de $p$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, chamada $p$-série, converge?

**Resposta:** Para $p = 1$, temos a série harmônica, e portanto, diverge. Para $p \neq 1$, consideramos a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ +\infty, & \text{se } p < 1. \end{cases}$$

Portanto, a $p$-série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

# Teste da Comparação

**Teorema 9 (Teste da Comparação)**

*Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam ambas séries com termos positivos tais que $a_n \leq b_n$ para todo $n > N$.*

- *Se $\sum b_n$ **converge**, então $\sum a_n$ também **converge**.*
- *Se $\sum a_n$ **diverge**, então $\sum b_n$ também **diverge**.*

## Exemplo 10

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

## Exemplo 10

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

**Resposta:** Como

$$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 3,$$

e a série $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$ diverge, pelo teste da comparação, a série em questão também diverge.

# Teste da Comparação no Limite

**Teorema 11 (Teste da Comparação no Limite)**

*Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam ambas séries com termos positivos. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

*em que $c > 0$ é um número finito, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.*

## Exemplo 12

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ quanto à sua convergência ou divergência.

## Exemplo 12

Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ quanto à sua convergência ou divergência.

**Resposta:** Como os termos dominantes no numerador e no denominador respectivamente são $2n^2$ e $\sqrt{n^5}$, consideramos

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2n^2}{\sqrt{n^5}}.$$

Desse modo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+3n)}{(\sqrt{5+n^5})} \frac{(\sqrt{n^5})}{(2n^2)} = 1.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, pelo teste da comparação no limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.

# Série Absolutamente Convergente

**Definição 13**

Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

**Teorema 14**

*Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.*

A recíproca não é sempre verdadeira: Uma série convergente não é necessariamente absolutamente convergente.

## Exemplo 15

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge ou diverge.

## Exemplo 15

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge ou diverge.

**Resposta:** Como

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pelo teste da comparação a série é absolutamente convergente. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge.

# Teste da Razão

**Teorema 16 (Teste da Razão)**

*Dada uma série $\sum a_n$, suponha que*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L,$$

*em que $L$ é um número não-negativo ou infinito. Tem-se:*

- *Se $L < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*
- *Se $L > 1$, então $\sum a_n$ diverge.*
- *Nada podemos afirmar se $L = 1$.*

## Exemplo 17

Avalie a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

## Exemplo 17

Avalie a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

**Resposta:** Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3} < 1,$$

a série converge pelo teste da razão.

## Exemplo 18

Avalie a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

## Exemplo 18

Avalie a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

**Resposta:** Como

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e > 1,$$

a série diverge pelo teste da razão.

# Teste da Raiz

**Teorema 19 (Teste da Raiz)**

*Dada uma série* $\sum a_n$*, suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

*em que* $L$ *é um número não-negativo ou infinito. Tem-se:*

- *Se* $L < 1$*, então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*
- *Se* $L > 1$*, então* $\sum a_n$ *diverge.*
- *Nada podemos afirmar se* $L = 1$*.*

## Exemplo 20

Teste a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$.

## Exemplo 20

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$.

**Resposta:** Como

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3} < 1,$$

a série converge pelo teste da raiz.

# Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos vários testes para avaliar a convergência ou divergência de uma série $\sum a_n$. Listamos abaixo os testes apresentados:

1. Teste da divergência.
2. Teste da integral.
3. Teste da comparação e comparação no limite.
4. Teste da razão e teste da raiz para convergência absoluta.

---

Lembramos que uma séria converge absolutamente se $\sum |a_n|$ converge. Sobretudo, convergência absoluta implica convergência.

Muito grato pela atenção!