# Cálculo III

## Aula 14 – Sequências e Séries.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

# Introdução

Sequências e séries são conceitos importantes em diversas áreas da matemática e suas aplicações.

Em particular, veremos que muitas funções podem ser expressas como séries.

A representação em séries de uma função possui um papel importante na resolução de equações diferenciais. Elas, resultam, por exemplo, nas famosas séries de Fourier!

**Observação:**

O conteúdo dessa aula e das próximas foram baseadas no livro texto "Cálculo, Volume 2" do James Stewart.

# Sequências Numéricas

Uma sequência pode ser pensada como uma lista ordenada de números reais

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

em que $a_1$ é o *primeiro termo*, $a_2$ é o *segundo termo* e, de um modo geral, $a_n$ é o *n-ésimo termo*.

Denotamos a sequência $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ por

$$\{a_n\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Formalmente, uma sequência é definida como uma função real cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos (ou não-negativos).

# Termo Geral

Podemos definir uma sequência apresentando uma fórmula para o termo geral.

## Exemplo 1

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots\right\}.$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots\right\}.$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty} = \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\right\}.$

Em alguma situações, porém, não é fácil ou possível determinar uma fórmula para o termo geral.

## Exemplo 2

A sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cujos termos são os algarismos decimais do número $e$ é

$$\{7, 1, 8, 2, 8, \ldots\}.$$

Embora bem definida, não temos uma fórmula para o termo geral dessa sequência.

## Exemplo 3

A sequência de Fibonacci $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definida recursivamente pelas equações

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \quad \text{e} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

A sequência é $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$.

# Limite de uma Sequência

Uma sequência tem **limite** $L$, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty,$$

se, para cada $\epsilon > 0$, existe um inteiro $N$ tal que

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

Dizemos que a sequência **converge**, ou é convergente, se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir.

Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge**, ou é divergente.

Escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ se para cada $M > 0$, existe um inteiro $N$ tal que

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad a_n > M.$$

A definição de limite de uma sequência é semelhante ao conceito de limite para funções. Com efeito, temos

## Teorema 4

*Se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *e* $f(n) = a_n$*, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Desse teorema, deduzimos propriedades como:

## Corolário 5

*Se* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *e* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *são ambas sequências convergentes, então*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

## Teorema 6 (Teorema do Confronto)

*Se* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *para* $n \geq n_0$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *então* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

## Corolário 7

*Se* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

## Exemplo 8

Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}.$$

## Exemplo 8

Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}.$$

**Resposta:** Podemos escrever $a_n = f(n)$, em que $f$ é a função dada por $f(x) = x/(x+1)$. Como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1,$$

concluímos, pelo Teorema 4, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

## Exemplo 9

Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

## Exemplo 9

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

**Resposta:** Podemos escrever $a_n = f(n)$, em que $f$ é a função dada por $f(x) = (\ln x)/x$. Por L'Hôpital, temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Pelo Teorema 4, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

**Exemplo 10**

Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ converge ou diverge.

## Exemplo 10

Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ converge ou diverge.

**Resposta:** A sequência diverge pois oscila entre $-1$ e $+1$. Portanto, ela não aproxima de nenhum número.

## Exemplo 11

Determine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

se ele existir.

## Exemplo 11

Determine
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
se ele existir.

**Resposta:** Como
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$
pelo Corolário 7, concluímos que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

## Exemplo 12

Determine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$$

se ele existir.

## Exemplo 12

Determine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$$

se ele existir.

**Resposta:** Primeiro, observe que

$$\underbrace{0}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{b_n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{2}{n}}_{<1} \frac{1}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{c_n}.$$

Como $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$, pelo teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

# Sequência Monótona

Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é **crescente** se $a_n < a_{n+1}$, para $n \geq 1$.

Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é dita **monótona** se for **crescente** ou **decrescente**.

# Sequência Limitada

Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é **limitada superiormente** se existir um número $M$ tal que

$$a_n \leq M, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é **limitada inferiormente** se existir um número $m$ tal que

$$m \leq a_n, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é **limitada** se for limitada superiormente e inferiormente.

**Teorema 13 (Teorema da Sequência Monótona)**

*Toda sequência monótona limitada é convergente.*

## Exemplo 14

Investigue a sequência $\{a_n\}$ definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots.$$

## Exemplo 14

Investigue a sequência $\{a_n\}$ definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots.$$

**Resposta:** Note que

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4 \quad \text{e} \quad a_3 = 5,$$

e, de um modo geral, $a_{n+1}$ é a média entre $a_n$ e 6. Como $a_1 = 2$, temos que a sequência é crescente e limitada superiormente por $M = 6$. Pelo Teorema 13, ela é convergente. Tomando o limite na relação de recorrência, temos que

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \frac{1}{2}(L + 6) \quad \Longrightarrow \quad L = 6.$$

Logo, o limite da sequência é $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$.

# Soma Parcial e Série

A soma dos $n$ primeiros termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

é chamada **soma parcial**.

Uma **série infinita**, ou simplesmente **série**, é obtida somando todos os termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Denotamos a série

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n.$$

Concentraremos nossos estudos nas séries que convergem.

## Definição 15

Dizemos que a série $\sum a_n$ **converge**, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,$$

se a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

---

O número $s$ é chamado **soma** da série.

---

Caso contrário, dizemos que a série **diverge**.

## Exemplo 16

Para quais valores de $r$ a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

converge? Determine o valor da soma da série para os valores que ela converge.

## Exemplo 16

Para quais valores de $r$ a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

converge? Determine o valor da soma da série para os valores que ela converge.

**Resposta:** A série geométrica converge se $|r| < 1$ e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Se $|r| > 1$, a série geométrica diverge.

## Exemplo 17

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n},$$

converge ou diverge?

## Exemplo 17

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n},$$

converge ou diverge?

**Resposta:** Temos a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Como $r = 4/3 > 1$, a série diverge.

# Considerações Finais

Uma sequência, denotada por $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, é geralmente definida apresentando o termo geral ou recursivamente.

---

Dizemos que a sequência converge se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. O limite de funções é semelhante ao limite de funções. Também destacamos que toda sequência monótona e limitada é convergente.

---

Uma série é definida como a soma dos termos de uma sequência. Se a sequência das somas parciais $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ converge para $s$, isto é, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, dizemos que a série converge e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s.$$

Muito grato pela atenção!