Cálculo III

Aula 12 – Transformada do Produto. Derivada e Integral da Transformada.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

A transformada da solução de um problema de valor inicial muitas vezes aparece como o produto de duas transformadas. O produto das transformadas, porém, não é a transformada da produto!

Exemplo 1

Considere o problema de valor inicial

$$x'' + x = \cos(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0.$$

Nesse caso, encontramos

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} = \mathscr{L}\{\cos(t)\}\,\mathscr{L}\{\text{sen}(t)\},$$

cuja solução é

$$x(t) = \frac{1}{2}t\,\text{sen}(t) \neq \cos(t)\,\text{sen}(t).$$

Convolução

Felizmente, podemos determinar uma função cuja transformada corresponde ao produto das transformadas usando a convolução:

Definição 2 (Convolução)

Dadas duas funções f e g contínuas por partes para $t \geq 0$, a convolução de f e g é a função definida por:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

Também denotamos a convolução por $f(t) * g(t)$.

Teorema 3 (Comutatividade)

A convolução é comutativa, ou seja, vale

$$f * g = g * f.$$

Exemplo 4

Determine a convolução de $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$.

Observação:

Lembre-se que

$$\cos a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)\Big).$$

Exemplo 4

Determine a convolução de $\cos(t)$ e $\text{sen}(t)$.

Observação:

Lembre-se que

$$\cos a \,\text{sen}\, b = \frac{1}{2}\Big(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)\Big).$$

Resposta: Pela definição de convolução, temos

$$\begin{aligned}\cos(t) * \text{sen}(t) &= \int_0^t \cos(\tau)\,\text{sen}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \text{sen}(t) - \text{sen}(2\tau - t)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left[\text{sen}(t)\tau + \frac{1}{2}\cos(2\tau - t)\right] = \frac{1}{2}t\,\text{sen}(t).\end{aligned}$$

Transformada da Convolução

O seguinte teorema estabelece uma relação entre a transformada da convolução e o produto das transformadas.

Teorema 5 (Transformada da Convolução)

Considere funções f e g contínuas por partes para todo $t \geq 0$. Se $|f(t)| \leq Me^{ct}$ e $|g(t)| \leq Me^{ct}$ quando $t \to \infty$, então a transformada da convolução existe e satisfaz

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\}, \quad \forall s > c.$$

Além disso, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t),$$

em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$.

Exemplo 6

Sabendo que

$$\mathscr{L}\{sen(2t)\} = \frac{2}{s^2+4} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1},$$

use a convolução para determinar a transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\}.$$

Exemplo 6

Sabendo que

$$\mathscr{L}\{sen(2t)\} = \frac{2}{s^2+4} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1},$$

use a convolução para determinar a transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\}.$$

Resposta: Pela definição da convolução, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \text{sen}(2\tau)e^{t-\tau}d\tau.$$

Essa integral pode ser calculada aplicando duas vezes integração por partes.

De modo alternativo, podemos resolver usando variáveis complexas como segue:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^t \mathrm{Im}\Big\{e^{2\tau i}\Big\} e^{t-\tau} d\tau = \mathrm{Im}\Big\{\int_0^t e^{2\tau i} e^{t-\tau} d\tau\Big\} = \mathrm{Im}\Big\{\int_0^t e^{t-(1-2i)\tau} d\tau\Big\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{-1}{(1-2i)} e^{t-(1-2i)\tau}\Big|_0^t\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{-1}{(1-2i)}\left[e^{2it}-e^t\right]\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{-(1+2i)}{5}\left[\cos(2t)+i\,\mathrm{sen}(2t)-e^t\right]\right\} \\
&= \frac{1}{5}\left[2e^t - 2\cos(2t) - \mathrm{sen}(2t)\right].
\end{aligned}
$$

Concluindo, temos

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{5}\Big(2e^t - \mathrm{sen}(2t) - 2\cos(2t)\Big).
$$

Análise de Sistemas

Considere o problema de valor inicial

$$ax'' + bx' + cx = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \text{e} \quad x'(0) = x_1,$$

em que $x(t)$ é chamada *saída* ou *resposta* e $f(t)$ é a *entrada*.

Aplicando a transformada de Laplace, encontramos

$$X(s) = \frac{(as + b)x_0 + ax_1}{as^2 + bs + c} + \frac{1}{as^2 + bs + c}F(s) = \Phi(s) + W(s)F(s).$$

A função $W(s) = 1/(as^2 + bs + c)$ é chamada *função de transferência* do sistema e

$$w(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)\},$$

é chamada *função peso*. Note que a função peso não depende de $f(t)$ nem das condições iniciais!

Princípio de Duhamel

Da convolução, temos que a resposta do sistema é

$$x(t) = \phi(t) + w(t) * f(t) = \phi(t) + \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

em que $\phi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$.

A fórmula acima, chamada *princípio de Duhamel*, permite estudar o comportamento (resposta) do sistema para diferentes funções de entrada f.

Exemplo 7

Considere um sistema descrito pelo PVI

$$x'' + 6x' + 10x = f(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0,$$

em que f representa uma força externa. Nesse caso, temos a função de transferência

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 10} = \frac{1}{(s+3)^2 + 1},$$

e a função peso

$$w(t) = e^{-3t} \operatorname{sen}(t).$$

Pelo princípio de Duhamel, temos

$$x(t) = \int_0^t e^{-3\tau} \operatorname{sen}(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Derivada da Transformada

O seguinte resultado estabelece uma conexão com a derivada da transformada $F(s)$ com a transformada de $-tf(t)$.

Teorema 8 (Derivada da Transformada)

Se f é uma função contínua por partes para todo $t \geq 0$ e $|f(t)| \leq Me^{ct}$ quando $t \to \infty$, então

$$\mathscr{L}\{-tf(t)\} = F'(s), \quad \forall s > c,$$

em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Equivalentemente,

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}.$$

De um modo geral, tem-se $\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$.

Exemplo 9

Determine $\mathscr{L}\left\{t^2 \operatorname{sen}(kt)\right\}$.

Exemplo 9

Determine $\mathscr{L}\left\{t^2 \operatorname{sen}(kt)\right\}$.

Resposta:

$$\mathscr{L}\left\{t^2 \operatorname{sen}(kt)\right\} = \frac{2k(3s^2 - k^2)}{(s^2 + k^2)^3}.$$

Exemplo 10

Determine $\mathscr{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}(1/s)\right\}$.

Exemplo 10

Determine $\mathscr{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}(1/s)\right\}$.

Resposta: Pelo teorema da derivada da transformada, temos que

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left[\tan^{-1}(1/s)\right]\right\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{1+(1/s)^2}\frac{1}{s^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}.$$

Integral da Transformada

O seguinte teorema relaciona a integral da transformada $F(s)$ com o quociente $f(t)/t$, se o último for "bem comportado" quando $t \to 0$.

Teorema 11 (Integral da Transformada)

Considere uma função f contínua por partes para todo $t \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} \quad \textit{existe e é finito.}$$

Se $|f(t)| \leq Me^{ct}$ quando $t \to \infty$, então

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma, \quad \forall s > c.$$

Equivalentemente, tem-se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma\right\}$.

Exemplo 12

Determine $\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{senh}(t)}{t}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh}(t)\} = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Exemplo 12

Determine $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\operatorname{senh}(t)}{t}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh}(t)\} = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Resposta:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{senh}(t)}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right).$$

Exemplo 13

Encontre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathscr{L}\{\text{senh}(t)\} = \frac{1}{s^2-1}.$$

Exemplo 13

Encontre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathscr{L}\{\text{senh}(t)\} = \frac{1}{s^2-1}.$$

Resposta:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t\text{senh}(t).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje definimos a convolução de duas funções f e g como

$$f(t) * g(t) = \int_0^t t(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0,$$

e destacamos que

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\}.$$

Na aula de hoje também destacamos que

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma,$$

em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

Muito grato pela atenção!