Cálculo III

Aula 11 – Função Degrau e Função Impulso.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Nas aulas anteriores, apresentamos a transformada de Laplace e vimos como ela pode ser usada para resolver um problema de valor inicial com coeficientes constantes.

Em todos os exemplos que apresentamos, consideramos funções de entrada (termo do lado direito da EDO) contínuas.

Uma das grandes vantagens da transformada de Laplace é que ela também pode ser usada quando a função de entrada é descontínua ou impulsiva.

Na aula de hoje, veremos como a transformada de Laplace é aplicada nesse contexto.

Função Degrau

Um tipo importante de descontinuidade que surge, por exemplo na análise de um circuito elétrico, é o de primeira espécie, ou seja, quando a função é contínua exceto por um número finito de "saltos".

Podemos operar de forma eficiente com esse tipo de descontinuidade usando a função:

Definição 1 (Função Degrau Unitário)

A **função degrau unitário**, denotada por u_c, é definida por:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$

Em particular, escrevemos $u \equiv u_0$.

Transformada da Função Degrau

A transformada de Laplace de u_c, para $c > 0$, é:

$$\mathscr{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.$$

Com efeito, pela definição da transformada de Laplace, temos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^\infty u_c(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s},\end{aligned}$$

para $s > 0$.

Considere agora uma função g dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

em que f é uma função contínua definida para todo $t \geq 0$.

Note que g possui um “salto” em $t = c$.

Em termos da função degrau, podemos escrever:

$$g(t) = u_c(t)f(t-c).$$

Desse modo, temos o seguinte resultado.

Teorema 2 (Translação em t)

Se $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se $c > 0$, então

$$\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathscr{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > a.$$

Inversamente, se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$u_c(t)f(t-c) = \mathscr{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}.$$

Com efeito, se a transformada de Laplace $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$, então

$$\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty u_c(t)f(t-c)e^{-st}dt = \int_c^\infty f(t-c)e^{-st}dt.$$

Tomando $\tau = t - c$, encontramos

$$\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+c)}d\tau = e^{-sc}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-sc}F(s).$$

Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função f dada por

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t), & 0 \leq t < \pi/4, \\ \operatorname{sen}(t) + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função f dada por

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(t), & 0 \leq t < \pi/4, \\ \text{sen}(t) + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Resposta: A função f pode ser escrita como:

$$f(t) = \text{sen}(t) + u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4).$$

Usando linearidade da transformada de Laplace, concluímos que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2+1}.$$

Exemplo 4

Determine a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Observação:

Sabe-se que

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Exemplo 4

Determine a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Observação:

Sabe-se que

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Resposta: Pela linearidade da transformada inversa, temos

$$f(t) = t - u_2(t)(t-2) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 5

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = g(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0,$$

em que g é a função dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5, \\ \frac{t-5}{5}, & 5 \leq t < 10, \\ 1, & 10 \leq t. \end{cases}$$

Exemplo 5

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = g(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0,$$

em que g é a função dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5, \\ \frac{t-5}{5}, & 5 \leq t < 10, \\ 1, & 10 \leq t. \end{cases}$$

Resposta: Note que

$$g(t) = \frac{1}{5}\Big(u_5(t)(t-5) - u_{10}(t)(t-10)\Big),$$

e

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2}.$$

Assim,

$$X(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2(s^2+4)} = \frac{1}{5}\left[e^{-5s}H(s) - e^{-10s}H(s)\right].$$

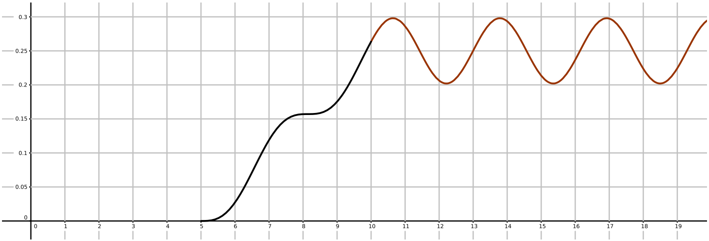
Dessa forma, temos

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t),$$

e, consequentemente,

$$x(t) = \frac{1}{5}u_5(t)h(t-5) - \frac{1}{5}u_{10}(t)h(t-10),$$

cujo gráfico é



Função Impulso

Em muitas situações, a função de entrada possui um grande valor que atua em um curto intervalo de tempo. Em termos matemáticos, o termo do lado direito da equação diferencial tem seguinte forma:

Definição 6 (Função Impulso Unitário)

A **"função" impulso unitário**, também chamada **delta de Dirac** e denotada por $\delta(t)$, é uma distribuição que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad \text{e} \quad \delta(t) = 0, \quad \text{para todo } t \neq 0.$$

Observação:

A função delta de Dirac pode ser definida pelo limite

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} d_\tau(t), \text{ em que } d_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}, & -\tau < t < \tau, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando o teorema do valor médio para integrais, podemos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Em vista disso, para qualquer $t_0 \geq 0$, definimos

$$\mathscr{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}.$$

Em particular, para $t_0 = 0$, temos

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Exemplo 7

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = 8\delta(t - 2\pi), \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0.$$

Exemplo 7

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = 8\delta(t-2\pi), \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0.$$

Resposta: Vamos denotar $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$. Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$\left(s^2X(s) - x(0)s - x'(0)\right) + 4X(s) = 8e^{-2\pi s}.$$

Usando as condições iniciais e isolando $X(s)$, encontramos

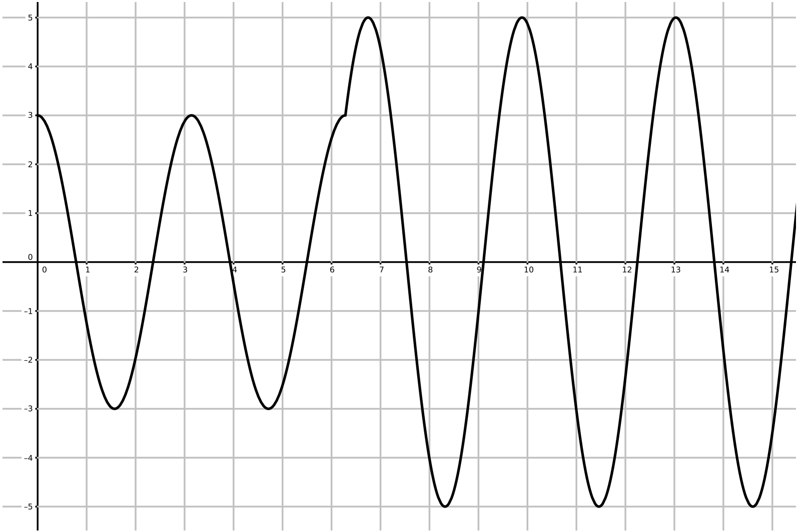
$$X(s) = \frac{3s + 8e^{-2\pi s}}{s^2+4} = 3\frac{s}{s^2+4} + 4e^{-2\pi s}\frac{2}{s^2+4}.$$

Lembrando das transformadas do seno e cosseno, concluímos que

$$x(t) = 3\cos(2t) + 4u_{2\pi}(t)\,\mathrm{sen}(2t).$$

Gráfico da função

$$x(t) = 3\cos(2t) + 4u_{2\pi}\,\text{sen}(2t).$$



Exemplo 8

Determine a solução do problema de valor inicial

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$$

Exemplo 8

Determine a solução do problema de valor inicial

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$$

Resposta: Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$2s^2Y(s) + sY(s) + 2Y(s) = e^{-5s},$$

ou ainda

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2}.$$

Completando quadrados no denominador, podemos escrever

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2}\frac{1}{\left[\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}\right]}.$$

Lembrando da transformada do seno e da translação em s, temos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\frac{15}{16}}}{\left[\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right]}\right\} = e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right).$$

Lembrando da transformada inversa da função degrau concluímos que

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}u_5(t)e^{-(t-5)/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right).$$

Gráfico da função

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos a função degrau unitário $u_c(t)$ e a delta de Dirac $\delta(t)$ que satisfazem:

$$\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0},$$

em que $F(s)$ denota a transformada de $f(t)$.

Ambas $u_c(t)$ e $\delta(t)$ são descontinuas e aparecem com frequência em situações práticas, como por exemplo, no estudo de circuitos elétricos.

Muito grato pela atenção!