Cálculo III

Aula 10 – Transformação de um Problema de Valor Inicial.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula de hoje, veremos como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver um problema de valor inicial.

Especificamente, considere o PVI com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by' + cy(t) = f(t), \quad y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(0) = y_1.$$

Da linearidade da transformada de Laplace, temos que

$$a\mathscr{L}\{y''(t)\} + b\mathscr{L}\{y'(t)\} + c\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{f\},$$

que envolve as transformadas de y'' e y'.

Veremos a relação de $\mathscr{L}\{y''(t)\}$ e $\mathscr{L}\{y'(t)\}$ com a transformada $Y(s)$ de $y(t)$, isto é, $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$.

Transformada de y'

Suponha que a transforamada de Laplace

$$Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt,$$

existe e

$$\lim_{t \to \infty} y(t) e^{-st} = 0.$$

Integrando por partes, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{y'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} y'(t) dt \\ &= y(t) e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt \\ &= -y(0) + s\mathscr{L}\{y(t)\}. \end{aligned}$$

Transformada de y'' e $y^{(n)}$

Pelo resultado anterior, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y''(t)\} &= -y'(0) + s\mathscr{L}\{y'(t)\} \\ &= -y'(0) + s\left(-y(0) + s\mathscr{L}\{y(t)\}\right) \\ &= s^2\mathscr{L}\{y(t)\} - y(0)s - y'(0),\end{aligned}$$

se $\lim_{t\to\infty} y(t)e^{-st} = 0$ e $\lim_{t\to\infty} y'(t)e^{-st} = 0$.

De um modo geral, temos

Transformada de $y^{(n)}$

Se $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ existe e $\lim_{t\to\infty} y^{(k)}(t)e^{-st} = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, então

$$\mathscr{L}\left\{y^{(n)}(t)\right\} = s^n Y(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} y^{(k)}(0).$$

Exemplo 1

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = -1.$$

Exemplo 1

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = -1.$$

Resposta: Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$\mathscr{L}\{y''\} - \mathscr{L}\{y'\} - 6\mathscr{L}\{y\} = 0.$$

Denotando $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ e usando as fórmulas para a transformada de y' e y'', encontramos

$$(s^2 Y(s) - y(0)s - y'(0)) - (sY(s) - y(0)) - 6Y(s) = 0.$$

Usando as condições iniciais e manipulando os termos, obtemos

$$Y(s) = \frac{2s - 3}{s^2 - s - 6}.$$

O denominador, porém, satisfaz a identidade

$$s^2 - s - 6 = (s-3)(s+2).$$

Logo, podemos admitir que existem A e B tais que

$$\frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2}.$$

Somando as frações do lado direito, concluímos que

$$\frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{A(s+2)+B(s-3)}{(s-3)(s+2)}.$$

Identificando os numeradores, concluímos que

$$A = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad B = \frac{7}{5}.$$

Portanto, temos que

$$Y(s) = \frac{3}{5}\frac{1}{s-3} + \frac{7}{5}\frac{1}{s+2}.$$

Aplicando a transformada inversa e lembrando que $\mathscr{L}^{-1}\{\}$ é linear, temos

$$y(t) = \frac{3}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{7}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}.$$

Lembrando da transformada da exponencial, concluímos que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{7}{5}e^{-2t}.$$

De um modo geral, podemos transformar um problema de valor inicial

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(0) = y_1,$$

com coeficientes constantes em

$$Y(s) = \frac{F(s) + (as+b)y_0 + ay_1}{as^2 + bs + c},$$

com $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. A transformada de Laplace inversa é usada para determinar a solução do PVI.

Frações Parciais

No processo de inversão da transformada de Laplace é comum nos depararmos com uma função da forma

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

em que P e Q são, respect., polinômios de grau m e n com $m < n$.

Nesses casos, usamos frações parciais para decompor $Y(s)$ numa soma de frações. Em termos gerais, seguimos as regras:

- O termo $(s-a)^k$ no denominador admite a forma

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(s-a)^k}.$$

- O termo irredutível $[(s-a)^2 + b^2]^k$ admite a forma:

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 s + B_2}{[(s-a)^2 + b^2]^2} + \ldots + \frac{A_k s + B_k}{[(s-a)^2 + b^2]^k}.$$

Exemplo 2

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' + 4y = \operatorname{sen}(3t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Exemplo 2

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' + 4y = \text{sen}(3t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Resposta: Usando a transformada de Laplace e as condições iniciais, obtemos

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = \mathscr{L}\{sen(3t)\} = \frac{3}{s^2+9}.$$

Equivalentemente, temos

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}.$$

Note que ambos os termos no denominador são irredutívies.
Sobretudo, como o numerador é constante, podemos supor

$$Y(s) = \frac{A}{s^2+4} + \frac{B}{s^2+9}.$$

Dessa forma, usando frações parciais, concluímos que

$$(A+B)s^2 + (9A+4B) = 3.$$

Portanto,

$$A = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad B = -\frac{3}{5}.$$

Aplicando a transformada inversa, usando sua linearidade e lembrando que $\mathscr{L}^{-1}\left\{a/(s^2+a^2)\right\} = \operatorname{sen}(at)$, temos que a solução do PVI satisfaz:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} \\ &= \frac{3}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} - \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} \\ &= \frac{3}{10}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(3t). \end{aligned}$$

Translação em s

Em alguns casos, o seguinte resultado também pode ser útil:

Translação em s

Se $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$, então $\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}$ existe para $s > a + c$ e satisfaz
$$\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s - a).$$
Equivalentemente, temos
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t).$$

Em palavras, uma translação em $s \to s - a$ corresponde a multiplicar f por e^{at}.

Exemplo 3

Determine as seguintes transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\cos(\omega t)\right\} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\left\{e^{at}\,\text{sen}(\omega t)\right\}.$$

Exemplo 3

Determine as seguintes transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\cos(\omega t)\right\} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\left\{e^{at}\,\text{sen}(\omega t)\right\}.$$

Resposta:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\cos(\omega t)\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2},$$

e

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\,\text{sen}(\omega t)\right\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2},$$

ambas válidas para $s > a$.

Exemplo 4

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$\frac{1}{2}x'' + 3x' + 17x = 0, \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 1.$$

Exemplo 4

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$\frac{1}{2}x'' + 3x' + 17x = 0, \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 1.$$

Resposta: Usando a transformada de Laplace, obtemos

$$X(s) = \frac{3s + 19}{s^2 + 6s + 34}.$$

Completando quadrados, temos que:

$$X(s) = \frac{3s + 19}{s^2 + 6s + 34} = \frac{3s + 19}{(s + 3)^2 + 5^2} = \frac{3s + 19}{(s - a)^2 + \omega^2},$$

em que $a = -3$ e $\omega = 5$.

Somando e subtraindo $3a$ no denominador, temos

$$X(s) = \frac{3s + 3a - 3a + 19}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

Reescrevendo o termo da esquerda como soma de duas frações, concluímos que

$$\begin{aligned} X(s) &= 3\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \frac{3a+19}{(s-a)^2+\omega^2} \\ &= 3\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \frac{3a+19}{\omega}\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \\ &= 3\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \frac{10}{5}\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}, \end{aligned}$$

cuja inversa e solução do PVI é

$$x(t) = 3e^{-3t}\cos(5t) + 2e^{-3t}\sin(5t).$$

Exemplo 5

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\omega t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

com $\omega_0 \neq \omega$.

Exemplo 5

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\omega t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

com $\omega_0 \neq \omega$.

Resposta: Usando a transformada de Laplace e as condições iniciais, obtemos

$$s^2 X(s) - X(s) = \frac{F_0 \omega}{(s^2 + \omega^2)}.$$

Equivalentemente, temos

$$X(s) = \frac{F_0 \omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)}.$$

Usando frações parciais, podemos escrever

$$X(s) = (F_0\omega)\left(\frac{A}{(s^2+\omega^2)} + \frac{B}{(s^2+\omega_0^2)}\right),$$

em que A e B são tais que

$$A(s^2+\omega_0^2) + B(s^2+\omega^2) = 1.$$

Resolvendo a última equação, concluímos que

$$B = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \quad \text{e} \quad A = -B.$$

Portanto, lembrando a transformada inversa de sen, concluímos que a solução do PVI é

$$x(t) = \frac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje mostramos que, sob certas condições, tem-se

$$\mathscr{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0),$$

em que $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$.

Sobretudo, podemos transformar um problema de valor inicial

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(0) = y_1,$$

em

$$Y(s) = \frac{F(s) + (as + b)y_0 + ay_1}{as^2 + bs + c},$$

com $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, e usar a transformada de Laplace inversa para determinar a solução do PVI.

Muito grato pela atenção!