Cálculo III

Aula 9 – Transformada de Laplace e sua Inversa.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Na aula de hoje, iniciaremos o estudo da transformada de Laplace.

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta que transforma um problema de valor inicial em uma equação algébrica.

Resolvendo a equação algébrica, podemos determinar a solução do problema de valor inicial usando a transformada inversa.

Na prática, geralmente determinamos a transformada inversa utilizando as propriedades da transformada de Laplace e uma tabela.

Transformada de Laplace

Definição 1 (Transformada de Laplace)

Seja f uma função definida para todo $t \geq 0$. A transformada de Laplace de f é uma função F definida por

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

para todos os valores de s para os quais a integral imprópria converge.

Observação:

Lembre-se que a integral imprópria acima é definida como o limite

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

Exemplo 2

Determine a transformada de Laplace da função constante

$$f(t) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 2

Determine a transformada de Laplace da função constante

$$f(t) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: Pela definição, a transformada de Laplace é

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sb}}{s}\right] = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0.$$

Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace é

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{-st+at} dt = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a.$$

Exemplo 4

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \text{sen}(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 4

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \text{sen}(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: Usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen}(at)dt \\
&= -\frac{1}{s}\,\text{sen}(at)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt \\
&= \frac{a}{s}\left[-\frac{1}{s}\cos(at)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen}(at)dt\right] \\
&= \left(a - a^2\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\}\right)/s^2.
\end{aligned}$$

Isolando $\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\}$, concluímos que $\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}, \quad \forall s > 0.$

Exemplo 5

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 5

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace é

$$\mathscr{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \forall s > 0.$$

Teorema 6 (Linearidade)

Dadas duas funções f e g e duas constantes a e b, temos que

$$\mathscr{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\},$$

para todos os valores de s para os quais as transformadas de Laplace de f e g existem.

Exemplo 7

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 3e^{2t} + 2\,\mathrm{sen}^2(3t), \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 7

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 3e^{2t} + 2\,\mathrm{sen}^2(3t), \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: Primeiro, lembre-se que

$$\mathrm{sen}^2(3t) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(6t)\big).$$

Usando a linearidade da transformada de Laplace, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{3e^{2t} + 2\,\mathrm{sen}^2(3t)\right\} &= 3\mathscr{L}\left\{e^{2t}\right\} + \mathscr{L}\{1\} - \mathscr{L}\{\cos(6t)\} \\ &= \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+36}, \quad \forall s > a.\end{aligned}$$

Transformada de Laplace Inversa

Uma função contínua $f(t)$, para $t \geq 0$, é unicamente determinada pela sua transformada de Laplace $F(s)$.

Dessa forma, podemos escrever

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\},$$

em que $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ denota a transformada de Laplace inversa.

Tal como $\mathscr{L}$, a transformada de Laplace inversa $\mathscr{L}^{-1}$ é também linear, ou seja,

$$\mathscr{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Exemplo 8

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{3s+5}{2s^2+3}, \quad \forall s > 0.$$

Exemplo 8

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{3s+5}{2s^2+3}, \quad \forall s > 0.$$

Resposta: Primeiro, escrevemos a transformada como:

$$F(s) = \frac{3}{2}\frac{s}{s^2+(3/2)} + \frac{5}{2\sqrt{3/2}}\frac{\sqrt{3/2}}{s^2+(3/2)}.$$

Lembrando da transformada de $\cos(at)$ e $\operatorname{sen}(at)$, com $a = \sqrt{3/2}$, e usando a linearidade da transformada inversa, concluímos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{2s^2+3}\right\} = \frac{3}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right) + \frac{5\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right), \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 9

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2}, \quad \forall s > 2.$$

Exemplo 9

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2}, \quad \forall s > 2.$$

Resposta: Sabemos que $s^2 - s - 2 = (s-2)(s+1)$. Dessa forma, usando frações parciais, concluímos que

$$F(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+1}.$$

Lembrando a transformada de Laplace de e^{at} e usando a linearidade da inversa, concluímos que a transformada de Laplace inversa é

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-s-2}\right\} = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Considerações Finais

A transformada de Laplace de f é uma função F definida por

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

e escrevemos

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\},$$

em que $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ denota a transformada de Laplace inversa.

Ambas transformada de Laplace e sua inversa são lineares, e.g.,

$$\mathscr{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\}.$$

Na próxima aula veremos como a transformada de Laplace e sua inversa são usadas para resolver um problema de valor inicial.

Muito grato pela atenção!