Cálculo III

Aula 8 – Método da Variação de Parâmetros.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula de hoje apresentaremos o método da variação de parâmetros que pode ser usado para obter a solução geral (ou uma solução particular) de uma EDO linear não-homogênea

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \quad x \in I,$$

com base em n soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearmente independentes da equação homogênea associada.

A principal vantagem do método da variação de parâmetros é sua grande aplicabilidade.

Ideia do Método da Variação de Parâmetros

Suponha que conhecemos a solução geral da equação homogênea

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

No método da variação de parâmetros substituímos as constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ por funções $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e impomos que

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x),$$

satisfaz a equação não-homogênea

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

Eventualmente, impomos condições adicionais que garantem a unicidade das funções $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

O Método para Equações de 2^a Ordem

Considere uma EDO linear não-homogênea de 2^a ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in I,$$

em que p, q e f são funções contínuas no intervalo aberto I.

Suponha que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I.$$

Lembre-se que o wronskiano não se anula em I, ou seja,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0,$$

para todo $x \in I$.

No método da variação de parâmetros, determinamos funções u_1 e u_2 de modo que

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

seja solução da equação não-homogênea.

Além disso, como as funções u_1 e u_2 não são determinadas de forma única somente pela equação não-homogênea, impomos

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Com essa condição adicional, que elimina as derivadas de segunda ordem de u_1 e u_2, obtemos o sistema

$$\begin{cases} y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) = 0, \\ y_1'(x)u_1'(x) + y_2'(x)u_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

que admite uma única solução pois $W(x) \neq 0$.

Resolvendo o sistema concluímos que

$$u_1(x) = c_1 - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx \quad \text{e} \quad u_2(x) = c_2 + \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx.$$

Dessa forma, a solução geral da equação não-homogênea é:

$$y(x) = \left[c_1 - \int^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi\right]y_1(x) + \left[c_2 + \int^x \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi\right]y_2(x).$$

Em particular, uma solução particular da equação não-homogênea é:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi + y_2(x)\int^x \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi.$$

Teorema 1 (Método da Variação de Parâmetros)

Considere uma EDO linear não-homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

em que p, q e f funções contínuas num intervalo aberto I. Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada, então

$$y(x) = \left[c_1 - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx\right]y_1(x) + \left[c_2 + \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx\right]y_2(x),$$

é solução geral de (1). *Além disso,*

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi + y_2(x)\int^x \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi,$$

é uma solução particular da equação não-homogênea.

Exemplo 2

Encontre uma solução particular de

$$y'' + y = \text{tg}(x).$$

Observação:

Sabe-se que

$$\int (\cos x - \sec x)dx = \text{sen}\, x - \ln|\sec x + \text{tg}(x)|.$$

Exemplo 2

Encontre uma solução particular de

$$y'' + y = \mathrm{tg}(x).$$

Observação:

Sabe-se que

$$\int (\cos x - \sec x)dx = \mathrm{sen}\, x - \ln|\sec x + \mathrm{tg}(x)|.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO não-homogênea é

$$y_p(x) = -(\cos x)\ln|\sec x + \mathrm{tg}\, x|.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método da variação de parâmetros que fornece a seguinte solução particular da EDO não homogênea:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi + y_2(x)\int^x \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}d\xi,$$

em que $W(\xi)$ denota o Wronskiano das soluções linearmente independentes y_1 e y_2 da equação homogênea.

Muito grato pela atenção!