Cálculo III

Aula 7 – Equações Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes e o Método dos Coeficientes Indeterminados.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Nas aulas anteriores, vimos como resolver EDOs homogêneas com coeficientes constantes.

Na aula de hoje, voltaremos nossa atenção para EDOs não-homogêneas da forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

em que f é uma função contínua em um intervalo aberto I.

Solução Geral

Suponha que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação não-homogênea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Defina

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x).$$

Substituindo na equação acima, concluímos que

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

ou seja, a diferença de duas soluções da equação não-homogênea é solução da EDO homogênea associada.

Dessa forma, podemos escrever a solução geral da EDO não-homogênea na forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

em que y_h é a solução geral da equação homogênea e y_p é uma solução particular da equação não-homogênea.

Concluindo, para resolver uma EDO não-homogênea devemos:

1. Obter uma solução geral y_h da equação homogênea.
2. Obter uma solução particular y_p da equação homogênea y_h.
3. A solução geral da equação não-homogênea é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Método dos Coeficientes Indeterminados

O **método dos coeficientes indeterminados**, também chamado **método dos coeficientes a determinar**, é usado para encontrar uma solução particular da equação não-homogênea.

O método consiste em assumir, com base na função f e na solução y_h, uma forma para a solução particular y_p que dependente de coeficientes ainda não especificados.

Polinômio

Se f é um polinômio de grau m, admitimos

$$y_p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

que também é um polinômio de grau m. Teremos uma solução particular da equação não-homogênea se determinarmos os coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Exemplo 1

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' + 3y' + 4y = 3x + 2.$$

Polinômio

Se f é um polinômio de grau m, admitimos

$$y_p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

que também é um polinômio de grau m. Teremos uma solução particular da equação não-homogênea se determinarmos os coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Exemplo 1

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' + 3y' + 4y = 3x + 2.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}.$$

Exponencial

Se f é uma função exponencial da forma

$$f(x) = ae^{\beta x},$$

admitimos uma solução particular é da forma

$$y_p(x) = Ae^{\beta x}.$$

Exemplo 2

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{3x}.$$

Exponencial

Se f é uma função exponencial da forma

$$f(x) = ae^{\beta x},$$

admitimos uma solução particular é da forma

$$y_p(x) = Ae^{\beta x}.$$

Exemplo 2

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{3x}.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{2}{5}e^{3x}.$$

Seno e Cosseno

Se f é uma combinação linear das funções seno e cosseno, ou seja,

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\,\mathrm{sen}(\omega x),$$

admitimos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x).$$

Exemplo 3

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$3y'' + y' - 2y = 2\cos x.$$

Veja no material complementar como ficaria a solução da EDO

$$3y'' + y' - 2y = 2x\cos x.$$

Seno e Cosseno

Se f é uma combinação linear das funções seno e cosseno, ou seja,

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\,\mathrm{sen}(\omega x),$$

admitimos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x).$$

Exemplo 3

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$3y'' + y' - 2y = 2\cos x.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = -\frac{5}{13}\cos x + \frac{1}{13}\,\mathrm{sen}\,x.$$

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x), \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2.$$

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x), \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2.$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{6}{13}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos(3x) + \frac{9}{13}\sin(3x).$$

O seguinte exemplo revela uma possível dificuldade do método dos coeficientes a determinar.

Exemplo 5

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{2x}.$$

O seguinte exemplo revela uma possível dificuldade do método dos coeficientes a determinar.

Exemplo 5

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{2x}.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{1}{2}xe^{2x},$$

que é obtida considerando uma solução da forma $y_p(x) = Axe^{2x}$.

Método dos Coeficientes Indeterminados

Em geral, no método dos coeficientes a determinar admitimos que a solução particular são combinações de funções da forma

$$x^s\Big\{P_m(x)e^{\beta x}\cos(\omega x) + Q_m(x)e^{\beta x}\,\mathrm{sen}(\omega x)\Big\},$$

em que

$$P_m(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m,$$

e

$$Q_m(x) = B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m,$$

são polinômios de grau m.

Exemplo 6

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2.$$

Exemplo 6

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{3}{2}e^x + 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4.$$

Considerações Finais

A solução geral de uma EDO com coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

é dada por

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

em que y_h é a solução geral da equação homogênea e y_p é uma solução particular da equação não homogênea.

No método dos coeficientes indeterminados, admitimos

$$y_p(x) = x^s \Big\{ P_m(x) e^{\beta x} \cos(\omega x) + Q_m(x) e^{\beta x} \operatorname{sen}(\omega x) \Big\},$$

em que $P_m(x)$ e $Q_m(x)$ são polinômios de grau m.

Muito grato pela atenção!

Material Complementar Exercícios Resolvidos

Exemplo 7

Encontre uma solução geral da equação não-homogênea

$$3y'' + y' - 2y = 2x\cos x.$$

Exemplo 7

Encontre uma solução geral da equação não-homogênea

$$3y'' + y' - 2y = 2x\cos x.$$

Resposta: Primeiro, precisamos resolver a EDO homogênea

$$3y'' + y' - 2y = 0.$$

A equação característica é

$$3r^2 + r - 2 = 0,$$

cujas raízes são

$$r_1 = -3 \quad \text{e} \quad r_2 = 2.$$

Portanto, a solução da equação homogênea é

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$

Vamos agora encontrar uma solução particular da equação não-homogênea usando o método dos coeficientes indeterminados (veja pp 11).

Especificamente, como o termo não-homogêneo $f(x) = 2x\cos(x)$ não contempla as soluções da equação homogênea, admitimos

$$y_p(x) = (A_1 x + A_0)\cos(x) + (B_1 x + B_0)\operatorname{sen}(x).$$

Derivando y_p, obtemos

$$\begin{aligned} y_p' &= A_1\cos(x) - (A_1 x + A_0)\operatorname{sen}(x) + B_1\operatorname{sen}(x) + (B_1 x + B_0)\cos(x) \\ &= -(A_1 x + A_0 - B_1)\operatorname{sen}(x) + (B_1 x + B_0 + A_1)\cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= -(A_1)\operatorname{sen}(x) - (A_1 x + A_0 - B_1)\cos(x) \\ &\quad + (B_1)\cos(x) - (B_1 x + B_0 + A_1)\operatorname{sen}(x) \\ &= -(A_1 x + A_0 - 2B_1)\cos(x) - (B_1 x + B_0 + 2A_1)\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação diferencial não-homogênea

$$3y_p'' + y' - 2y = 2x\cos(x),$$

encontramos:

$$\begin{aligned}-3(A_1x + A_0 - 2B_1)\cos(x) - 3(B_1x + B_0 + 2A_1)\,\text{sen}(x)\\ -(A_1x + A_0 - B_1)\,\text{sen}(x) + (B_1x + B_0 + A_1)\cos(x)\\ -2(A_1x + A_0)\cos(x) - 2(B_1x + B_0)\,\text{sen}(x) = 2x\cos(x).\end{aligned}$$

Colocando os temos $\cos(x)$ e $\text{sen}(x)$ em evidência, obtemos

$$\begin{aligned}[-3(A_1x + A_0 - 2B_1) + (B_1x + B_0 + A_1) - 2(A_1x + A_0)]\cos(x)\\ +[-3(B_1x + B_0 + 2A_1) - (A_1x + A_0 - B_1) - 2(B_1x + B_0)]\,\text{sen}(x)\\ = 2x\cos(x).\end{aligned}$$

Identificando os termos da direita com os da esquerda da equação, concluímos que

$$\begin{aligned}(-5A_1 + B_1)x - 5A_0 + 6B_1 + B_0 + A_1 = 2x,\\ (-5B_1 - A_1)x - 6A_1 - A_0 + B_1 - 5B_0 = 0.\end{aligned}$$

Temos portanto o sistema de equações:

$$\begin{cases} -5A_1 + B_1 = 2 \\ -5B_1 - A_1 = 0, \\ -5A_0 + 6B_1 + B_0 + A_1 = 0 \\ -6A_1 - A_0 + B_1 - 5B_0 = 0, \end{cases}$$

cuja solução é

$$A_0 = 18/169, \quad A_1 = -5/13, \quad B_0 = 77/169 \quad \text{e} \quad B_1 = 1/13.$$

Concluindo, uma solução particular da equação não-homogênea é

$$y_p(x) = \left(-\frac{5}{13}x + \frac{18}{169}\right)\cos(x) + \left(\frac{1}{13}x + \frac{77}{169}\right)\text{sen}(x),$$

e a solução geral $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ é

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{5}{13}x + \frac{18}{169}\right)\cos(x) + \left(\frac{1}{13}x + \frac{77}{169}\right)\text{sen}(x).$$