

# Cálculo III

Aula 6 – Equações Lineares Homogêneas.  
Raízes Repetidas da Equação Característica;  
Redução de Ordem. Equações de Euler.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle e  
Roberto de Almeida Prado  
IMECC – Unicamp

# Equações Lineares Homogêneas

---

Na aula anterior estudamos as equações lineares homogêneas de segunda ordem da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

em que  $p(x)$  e  $q(x)$  são funções contínuas em um intervalo  $I$ .

---

Vimos que se  $y_1$  e  $y_2$  são duas soluções linearmente independentes de (1), então a solução geral da EDO (1) é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias.

## Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

---

Estudamos, em particular, a solução geral de uma equação homogênea com coeficientes constantes ( $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  e  $a_2 \neq 0$ )

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (2)$$

quando as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da sua equação característica

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad (3)$$

são reais e distintas ou complexas conjugadas.

---

No caso em que  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  e  $r_1 \neq r_2$ , a solução geral de (2) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Quando  $r_1 = \lambda + i\mu$  e  $r_2 = \lambda - i\mu$ , com  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $\mu \neq 0$ , são as raízes complexas de (3), a solução geral de (2) é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x.$$

## Raízes Repetidas; Redução de Ordem

---

Consideremos agora o caso em que as duas raízes  $r_1$  e  $r_2$  são iguais. Nosso objetivo é construir a solução geral da EDO homogênea (2) e para isso precisaremos de duas soluções  $y_1$  e  $y_2$  LI.

---

Contudo, quando  $r_1 = r_2$  é uma raiz repetida da equação característica, temos apenas uma solução  $y_1(x) = e^{r_1 x}$  de (2) e devemos recorrer ao **método de redução de ordem** para encontrar uma segunda solução  $y_2$  que é linearmente independente com  $y_1$ .

---

A **redução de ordem** pode ser aplicada para qualquer equação linear homogênea de segunda ordem da forma (1) (não necessariamente com coeficientes constantes), em que conhecemos uma solução e desejamos construir uma segunda solução LI com a primeira.

## Redução de Ordem

---

Suponha que conhecemos uma solução  $y_1 \neq 0$  de uma equação linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (4)$$

com  $p$  e  $q$  contínuas num intervalo  $I$ . No **método de redução de ordem**, determinamos uma função  $u(x)$  tal que

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

seja uma segunda solução de (4), com  $y_1$  e  $y_2$  LI. A solução geral de (4) é  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ , com  $c_1, c_2$  constantes arbitrárias.

---

Para encontrarmos  $u(x)$ , substituímos  $y_2 \equiv y_2(x)$  e suas derivadas

$$y_2' = uy_1' + u'y_1 \quad \text{e} \quad y_2'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$$

na equação (4):

$$\begin{aligned} & uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + p(x)(uy_1' + u'y_1) + q(x)uy_1 = 0 \\ \implies & u(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0. \end{aligned}$$

Como  $y_1$  é solução de (4), segue que

$$y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0.$$

Fazendo a substituição  $w = u'$ , resulta na equação de primeira ordem (redução de ordem):

$$y_1w' + (2y_1' + p(x)y_1)w = 0.$$

Dividindo esta equação por  $y_1 \neq 0$ , separando as variáveis e integrando temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{w} dw = - \int \left( \frac{2y_1'}{y_1} + p(x) \right) dx \\ \implies & \ln |w| = -2 \ln |y_1| - \int p(x) dx + c, \end{aligned}$$

com  $c$  uma constante.

Aplicando a exponencial, obtemos

$$w = c_1 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} \quad (c_1 = \pm e^c).$$

Usando  $w = u'$  e integrando, concluímos que

$$u(x) = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx + c_2,$$

com  $c_1, c_2$  constantes. Como precisamos de apenas uma função  $u(x)$ , escolhemos  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 1$ . Portanto, uma segunda solução de (4) é

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx. \quad (5)$$

As soluções  $y_1$  e  $y_2$  são LI, pois  $W(y_1(x), y_2(x)) = e^{-\int p(x)dx} \neq 0$ .

## Exemplo 1

Sabendo que  $y_1(x) = e^{-2x}$  é uma solução da EDO

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

aplique o método da redução de ordem para determinar uma segunda solução  $y_2(x)$ . Verifique se  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes. Encontre a solução geral da EDO.



## Exemplo 1

Sabendo que  $y_1(x) = e^{-2x}$  é uma solução da EDO

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

aplique o método da redução de ordem para determinar uma segunda solução  $y_2(x)$ . Verifique se  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes. Encontre a solução geral da EDO.

**Resolução:** Pelo método de redução de ordem (relação (5)), uma segunda solução da equação é

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = e^{-2x} \int \frac{e^{-\int 4dx}}{[e^{-2x}]^2} dx \\ &= e^{-2x} \int \frac{e^{-4x}}{e^{-4x}} dx = xe^{-2x}. \end{aligned}$$

O Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  é

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} \neq 0, \forall x.$$

Portanto,  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes.

---

A solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x},$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

## Raízes Repetidas da Equação Característica

---

Voltemos agora a EDO homogênea (2) com coeficientes constantes

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (6)$$

e suponhamos que a sua equação característica  $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$  possui raízes reais repetidas ( $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0$ ):

$$r_1 = r_2 = \frac{-a_1}{2a_2}. \quad (*)$$

Assim, obtemos inicialmente a solução  $y_1(x) = e^{r_1 x}$  de (6).

---

Pelo método da redução de ordem, uma segunda solução de (6) é

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{[y_1(x)]^2} dx = e^{r_1 x} \int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_2} x}}{e^{2r_1 x}} dx \stackrel{(*)}{=} x e^{r_1 x}.$$

As soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são LI, pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & xe^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & e^{r_1 x} + r_1 xe^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} \neq 0, \forall x.$$

---

Portanto, a solução geral de (6) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x},$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

## Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

## Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

**Resolução:** A equação característica da EDO é

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0.$$

Logo, a única raiz é  $r_1 = -1$ . A solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x},$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

Usando a condição inicial,

$$y(0) = 5 \implies c_1 = 5. \quad (7)$$

A derivada de  $y(x)$  é

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2(e^{-x} - xe^{-x}).$$

Usando a outra condição inicial,

$$y'(0) = -3 \implies -c_1 + c_2 = -3. \quad (8)$$

De (7) e (8) temos  $c_1 = 5$  e  $c_2 = 2$ .

---

Portanto, a solução do PVI é

$$y(x) = 5e^{-x} + 2xe^{-x}.$$

# Equações de Euler

---

Uma EDO de 2ª ordem da forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0, \quad (9)$$

em que  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , é chamada **equação de Euler**.

---

Observe que (9) tem coeficientes variáveis e o grau de cada coeficiente coincide com a ordem de derivação.

---

Queremos encontrar duas soluções LI de (9) para construirmos a sua solução geral. Assim, procuramos soluções de (9) da forma

$$y(x) = x^r \quad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } r \in \mathbb{C}).$$



Substituindo  $y = x^r$ ,  $y' = rx^{r-1}$  e  $y'' = r(r-1)x^{r-2}$  em (9), temos

$$\begin{aligned} ax^2 r(r-1)x^{r-2} + bx rx^{r-1} + cx^r &= 0 \\ \implies x^r [ar(r-1) + br + c] &= 0 \end{aligned}$$

Dividindo por  $x^r \neq 0$ , obtemos a **equação característica**:

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0. \tag{10}$$

Note que  $y = x^r$  é solução de (9) se e somente se  $r$  é solução de (10).

---

Temos 3 casos a considerar para as duas raízes de (10)

( $\Delta = (b-a)^2 - 4ac$ ):

1. Raízes reais distintas ( $\Delta > 0$ ):  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  com  $r_1 \neq r_2$ ;
2. Raízes complexas conjugadas ( $\Delta < 0$ ):  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$  com  $r_2 = \overline{r_1}$ ;
3. Raízes repetidas ( $\Delta = 0$ ):  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  com  $r_1 = r_2$ .

**Caso 1:** Se as raízes  $r_1$  e  $r_2$  de (10) são reais e distintas, então temos duas soluções de (9),  $y_1 = x^{r_1}$  e  $y_2 = x^{r_2}$ , as quais são LI pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0, \forall x.$$

Portanto, a solução geral da equação de Euler (9) é

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \quad (c_1, c_2 \text{ constantes}).$$

---

**Caso 2:** Se as raízes de (10) são complexas conjugadas,

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad r_2 = \alpha - i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0),$$

então, como no Caso 1, temos duas soluções complexas LI de (9):

$$y_1 = x^{\alpha+i\beta} \quad \text{e} \quad y_2 = x^{\alpha-i\beta}.$$

Como queremos soluções reais, usando a fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , podemos escrevê-las como

$$y_1(x) = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha (\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)),$$

$$y_2(x) = x^\alpha x^{-i\beta} = x^\alpha e^{-i\beta \ln x} = x^\alpha (\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)).$$

Escolhendo a parte real e a parte imaginária de  $y_1$  ou de  $y_2$ , pelo Teorema 11 da Aula 5, obtemos duas soluções reais de (9):

$$\tilde{y}_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x),$$

que são LI, pois  $W(\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$ .

---

Portanto, a solução geral da equação de Euler (9) é dada por

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x), \quad x > 0,$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias.

**Caso 3:** Se as raízes de (10) são repetidas,  $r_1 = r_2 = -(b - a)/2a$ , então obtemos somente uma solução  $y_1 = x^{r_1}$  da equação de Euler (9). Dividindo (9) por  $ax^2 \neq 0$  e aplicando o método de redução de ordem (relação (5)), segue que uma segunda solução é

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = x^{r_1} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{x^{2r_1}} dx \\&= x^{r_1} \int \frac{e^{-\frac{b}{a} \ln x}}{x^{2r_1}} dx = x^{r_1} \int x^{-b/a} x^{-2r_1} dx \\&= x^{r_1} \int x^{-1} dx = x^{r_1} \ln x.\end{aligned}$$

Note que  $y_1$  e  $y_2$  são LI, pois  $W(y_1(x), y_2(x)) = x^{2r_1-1} \neq 0$  para todo  $x$ . Portanto, a solução geral de (9) é dada por

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x, \quad x > 0,$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias.

### Exemplo 3

Determine a solução geral de cada uma das equações de Euler:

1.  $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0;$
2.  $x^2y'' + 2xy' + 0,25y = 0, \quad x > 0.$

### Exemplo 3

Determine a solução geral de cada uma das equações de Euler:

1.  $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0;$
2.  $x^2y'' + 2xy' + 0,25y = 0, \quad x > 0.$

**Resolução:** 1. Procuramos solução da equação da forma  $y = x^r$ .  
Derivando duas vezes, temos

$$y' = rx^{r-1} \quad \text{e} \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Substituindo na equação, resulta

$$\begin{aligned} & 2x^2 r(r-1)x^{r-2} + 3x rx^{r-1} - x^r = 0 \\ \implies & x^r [2r(r-1) + 3r - 1] = 0 \\ \implies & 2r^2 + r - 1 = 0 \\ \implies & r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Logo, as raízes da equação característica são  $r_1 = 1/2$  e  $r_2 = -1$ .  
Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}, \quad x > 0.$$

---

2. Analogamente ao item 1, substituindo  $y = x^r$ ,  $y' = rx^{r-1}$  e  $y'' = r(r-1)x^{r-2}$  na equação, resulta

$$\begin{aligned} & x^2 r(r-1)x^{r-2} + 2x rx^{r-1} + 0,25x^r = 0 \\ \implies & x^r [r(r-1) + 2r + 0,25] = 0 \\ \implies & r^2 + r + 0,25 = 0 \\ \implies & r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2} = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a única raiz da equação característica é  $r_1 = -1/2$ . Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1/2} \ln x, \quad x > 0.$$

# Equações Lineares Homogêneas de Ordem Superior

Consideremos uma EDO linear homogênea de ordem  $n \geq 2$  da forma

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad (11)$$

em que  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  são funções contínuas em um intervalo  $I$ .

## Teorema 4 (Solução Geral - Equações Homogêneas)

*Se  $y_1, y_2, \dots, y_n$  são soluções linearmente independentes da equação homogênea (11), então a sua solução geral é dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

*em que  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias.*



# Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

---

Considere agora uma EDO linear homogênea de ordem  $n \geq 2$  com coeficientes constantes ( $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  e  $a_n \neq 0$ ):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (12)$$

---

De modo análogo ao caso  $n = 2$ , procuramos soluções não nula de (12) da forma

$$y(x) = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),$$

em que  $r$  é solução da **equação característica**:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Se as  $n$  raízes  $r_1, r_2, \dots, r_n$  da equação característica forem todas reais e distintas, então a solução geral da EDO (12) é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x},$$

em que  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias.

---

Se a equação característica possui raízes complexas, elas sempre aparecem em pares conjugados da forma

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0),$$

e a solução geral de (12) contém a combinação linear

$$c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x,$$

com  $c_1, c_2$  constantes.

## Raízes Repetidas

---

Quando  $r_1$  é uma raiz real de multiplicidade  $k$  da equação característica (isto é,  $k$  raízes repetidas iguais a  $r_1$ ), as  $k$  soluções LI de (12) correspondentes a  $r_1$  são

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{r_1 x}$$

e a solução geral de (12) contém a combinação linear

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{r_1 x}.$$

---

Se  $r_1 = \lambda + i\mu$  é uma raiz complexa de multiplicidade  $k$  da equação característica, então a solução geral de (12) contém a combinação linear

$$c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x + x \left( c_3 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_4 e^{\lambda x} \sin \mu x \right) + \dots \\ \dots + x^{k-1} \left( c_{2k-1} e^{\lambda x} \cos \mu x + c_{2k} e^{\lambda x} \sin \mu x \right),$$

com  $c_1, c_2, \dots, c_{2k-1}, c_{2k}$  constantes.

## Exemplo 5

Encontre a solução geral da EDO

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0.$$

## Exemplo 5

Encontre a solução geral da EDO

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0.$$

**Resolução:** A equação é linear homogênea com coeficientes constantes. A equação característica é

$$r^6 + 2r^4 + r^2 = r^2(r^2 + 1)^2 = 0.$$

As raízes são  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = i$  e  $r_3 = -i$ , todas de multiplicidade 2.

Para a raiz  $r_1 = 0$ , uma parte da solução geral é

$$y_1(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} = c_1 + c_2 x$$

e para as raízes complexas  $r_2 = i$  e  $r_3 = -i$ , uma segunda parte da solução geral é

$$\begin{aligned}y_2(x) &= c_3 e^{0x} \cos x + c_4 e^{0x} \operatorname{sen} x + x(c_5 e^{0x} \cos x + c_6 e^{0x} \operatorname{sen} x) \\ &= c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + c_5 x \cos x + c_6 x \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

A solução geral da EDO é dada por

$$\begin{aligned}y(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ &= c_1 + c_2 x + (c_3 + c_5 x) \cos x + (c_4 + c_6 x) \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

## Considerações Finais

---

Na aula de hoje apresentamos o método de redução de ordem, o qual pode ser aplicado às EDOs lineares homogêneas de  $2^{\text{a}}$  ordem, para obter a partir de uma solução conhecida, uma segunda solução da equação, linearmente independente com a primeira.

---

Aplicamos o método de redução de ordem para encontrar a solução geral de uma EDO homogênea com coeficientes constantes, no caso em que a equação característica possui raízes repetidas.

---

Finalmente, estudamos as equações de Euler de  $2^{\text{a}}$  ordem, as quais podem ser resolvidas de forma similar às equações homogêneas com coeficientes constantes.

Muito grato pela atenção!