Cálculo III

Aula 6 – Equações Lineares Homogêneas. Raízes Repetidas da Equação Característica; Redução de Ordem. Equações de Euler.

Marcos Eduardo Valle e
Roberto de Almeida Prado
IMECC – Unicamp

Equações Lineares Homogêneas

Na aula anterior estudamos as equações lineares homogêneas de segunda ordem da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo I.

Equações Lineares Homogêneas

Na aula anterior estudamos as equações lineares homogêneas de segunda ordem da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo I.

Vimos que se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de (1), então a solução geral da EDO (1) é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Estudamos, em particular, a solução geral de uma equação homogênea com coeficientes constantes ($a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \neq 0$)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{2}$$

quando as raízes r_1 e r_2 da sua equação característica

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{3}$$

são reais e distintas ou complexas conjugadas.

Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Estudamos, em particular, a solução geral de uma equação homogênea com coeficientes constantes ($a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \neq 0$)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{2}$$

quando as raízes r_1 e r_2 da sua equação característica

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{3}$$

são reais e distintas ou complexas conjugadas.

No caso em que $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2$, a solução geral de (2) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Estudamos, em particular, a solução geral de uma equação homogênea com coeficientes constantes ($a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \neq 0$)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{2}$$

quando as raízes r_1 e r_2 da sua equação característica

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{3}$$

são reais e distintas ou complexas conjugadas.

No caso em que $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2$, a solução geral de (2) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Quando $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\mu \neq 0$, são as raízes complexas de (3), a solução geral de (2) é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x.$$

Raízes Repetidas; Redução de Ordem

Consideremos agora o caso em que as duas raízes r_1 e r_2 são iguais. Nosso objetivo é construir a solução geral da EDO homogênea (2) e para isso precisaremos de duas soluções y_1 e y_2 LI.

Raízes Repetidas; Redução de Ordem

Consideremos agora o caso em que as duas raízes r_1 e r_2 são iguais. Nosso objetivo é construir a solução geral da EDO homogênea (2) e para isso precisaremos de duas soluções y_1 e y_2 LI.

Contudo, quando $r_1 = r_2$ é uma raiz repetida da equação característica, temos apenas uma solução $y_1(x) = e^{r_1 x}$ de (2) e devemos recorrer ao **método de redução de ordem** para encontrar uma segunda solução y_2 que é linearmente independente com y_1.

Raízes Repetidas; Redução de Ordem

Consideremos agora o caso em que as duas raízes r_1 e r_2 são iguais. Nosso objetivo é construir a solução geral da EDO homogênea (2) e para isso precisaremos de duas soluções y_1 e y_2 LI.

Contudo, quando $r_1 = r_2$ é uma raiz repetida da equação característica, temos apenas uma solução $y_1(x) = e^{r_1 x}$ de (2) e devemos recorrer ao **método de redução de ordem** para encontrar uma segunda solução y_2 que é linearmente independente com y_1.

A **redução de ordem** pode ser aplicada para qualquer equação linear homogênea de segunda ordem da forma (1) (não necessariamente com coeficientes constantes), em que conhecemos uma solução e desejamos construir uma segunda solução LI com a primeira.

Redução de Ordem

Suponha que conhecemos uma solução $y_1 \neq 0$ de uma equação linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4}$$

com p e q contínuas num intervalo I.

Redução de Ordem

Suponha que conhecemos uma solução $y_1 \neq 0$ de uma equação linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4}$$

com p e q contínuas num intervalo I. No **método de redução de ordem**, determinamos uma função $u(x)$ tal que

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

seja uma segunda solução de (4), com y_1 e y_2 LI. A solução geral de (4) é $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, com c_1, c_2 constantes arbitrárias.

Redução de Ordem

Suponha que conhecemos uma solução $y_1 \neq 0$ de uma equação linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4}$$

com p e q contínuas num intervalo I. No **método de redução de ordem**, determinamos uma função $u(x)$ tal que

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

seja uma segunda solução de (4), com y_1 e y_2 LI. A solução geral de (4) é $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, com c_1, c_2 constantes arbitrárias.

Para encontrarmos $u(x)$, substituimos $y_2 \equiv y_2(x)$ e suas derivadas

$$y_2' = uy_1' + u'y_1 \quad \text{e} \quad y_2'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$$

na equação (4):

$$\begin{aligned} & uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + p(x)(uy_1' + u'y_1) + q(x)uy_1 = 0 \\ \Longrightarrow \quad & u(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0. \end{aligned}$$

Como y_1 é solução de (4), segue que

$$y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0.$$

$$\begin{aligned} & uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + p(x)(uy_1' + u'y_1) + q(x)uy_1 = 0 \\ \implies \quad & u(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0. \end{aligned}$$

Como y_1 é solução de (4), segue que

$$y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0.$$

Fazendo a substituição $w = u'$, resulta na equação de primeira ordem (redução de ordem):

$$y_1w' + (2y_1' + p(x)y_1)w = 0.$$

$$
\begin{aligned}
& uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + p(x)(uy_1' + u'y_1) + q(x)uy_1 = 0 \\
\implies \quad & u(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0.
\end{aligned}
$$

Como y_1 é solução de (4), segue que

$$
y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0.
$$

Fazendo a substituição $w = u'$, resulta na equação de primeira ordem (redução de ordem):

$$
y_1w' + (2y_1' + p(x)y_1)w = 0.
$$

Dividindo esta equação por $y_1 \neq 0$, separando as variáveis e integrando temos:

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{1}{w}\, dw = -\int \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x) \right) dx \\
\implies \quad & \ln|w| = -2\ln|y_1| - \int p(x)dx + c,
\end{aligned}
$$

com c uma constante.

Aplicando a exponencial, obtemos

$$w = c_1 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2} \quad (c_1 = \pm e^c).$$

Aplicando a exponencial, obtemos

$$w = c_1 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2} \quad (c_1 = \pm e^c).$$

Usando $w = u'$ e integrando, concluímos que

$$u(x) = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx + c_2,$$

com c_1, c_2 constantes. Como precisamos de apenas uma função $u(x)$, escolhemos $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$.

Aplicando a exponencial, obtemos

$$w = c_1 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2} \quad (c_1 = \pm e^c).$$

Usando $w = u'$ e integrando, concluímos que

$$u(x) = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx + c_2,$$

com c_1, c_2 constantes. Como precisamos de apenas uma função $u(x)$, escolhemos $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$. Portanto, uma segunda solução de (4) é

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx \,. \tag{5}$$

Aplicando a exponencial, obtemos

$$w = c_1 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2} \quad (c_1 = \pm e^c).$$

Usando $w = u'$ e integrando, concluímos que

$$u(x) = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx + c_2,$$

com c_1, c_2 constantes. Como precisamos de apenas uma função $u(x)$, escolhemos $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$. Portanto, uma segunda solução de (4) é

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = \ y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx \ . \tag{5}$$

As soluções y_1 e y_2 são LI, pois $W(y_1(x), y_2(x)) = e^{-\int p(x)dx} \neq 0$.

Exemplo 1

Sabendo que $y_1(x) = e^{-2x}$ é uma solução da EDO

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

aplique o método da redução de ordem para determinar uma segunda solução $y_2(x)$. Verifique se y_1 e y_2 são linearmente independentes. Encontre a solução geral da EDO.

Exemplo 1

Sabendo que $y_1(x) = e^{-2x}$ é uma solução da EDO

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

aplique o método da redução de ordem para determinar uma segunda solução $y_2(x)$. Verifique se y_1 e y_2 são linearmente independentes. Encontre a solução geral da EDO.

Resolução: Pelo método de redução de ordem (relação (5)), uma segunda solução da equação é

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = e^{-2x} \int \frac{e^{-\int 4dx}}{[e^{-2x}]^2} dx \\ &= e^{-2x} \int \frac{e^{-4x}}{e^{-4x}} dx = xe^{-2x}. \end{aligned}$$

O Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} \neq 0, \ \forall x.$$

Portanto, y_1 e y_2 são linearmente independentes.

O Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} \neq 0, \ \forall x.$$

Portanto, y_1 e y_2 são linearmente independentes.

A solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 xe^{-2x},$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Raízes Repetidas da Equação Característica

Voltemos agora a EDO homogênea (2) com coeficientes constantes

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{6}$$

e suponhamos que a sua equação característica $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ possui raízes reais repetidas ($\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0$):

$$r_1 = r_2 = \frac{-a_1}{2a_2}. \quad (*)$$

Assim, obtemos inicialmente a solução $y_1(x) = e^{r_1 x}$ de (6).

Raízes Repetidas da Equação Característica

Voltemos agora a EDO homogênea (2) com coeficientes constantes

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{6}$$

e suponhamos que a sua equação característica $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ possui raízes reais repetidas ($\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0$):

$$r_1 = r_2 = \frac{-a_1}{2a_2}. \quad (*)$$

Assim, obtemos inicialmente a solução $y_1(x) = e^{r_1 x}$ de (6).

Pelo método da redução de ordem, uma segunda solução de (6) é

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = e^{r_1 x} \int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_2} x}}{e^{2r_1 x}} dx \overset{(*)}{=} x e^{r_1 x}.$$

As soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são LI, pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & xe^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & e^{r_1 x} + r_1 xe^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} \neq 0, \ \forall x.$$

As soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são LI, pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & xe^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & e^{r_1 x} + r_1 xe^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} \neq 0, \ \forall x.$$

Portanto, a solução geral de (6) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 xe^{r_1 x},$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

Resolução: A equação característica da EDO é

$$r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0.$$

Logo, a única raiz é $r_1 = -1$.

Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

Resolução: A equação característica da EDO é

$$r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0.$$

Logo, a única raiz é $r_1 = -1$. A solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x},$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Usando a condição inicial,

$$y(0) = 5 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 5. \tag{7}$$

Usando a condição inicial,

$$y(0) = 5 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 5. \tag{7}$$

A derivada de $y(x)$ é

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2(e^{-x} - xe^{-x}).$$

Usando a condição inicial,

$$y(0) = 5 \implies c_1 = 5. \tag{7}$$

A derivada de $y(x)$ é

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2(e^{-x} - xe^{-x}).$$

Usando a outra condição inicial,

$$y'(0) = -3 \implies -c_1 + c_2 = -3. \tag{8}$$

De (7) e (8) temos $c_1 = 5$ e $c_2 = 2$.

Usando a condição inicial,

$$y(0) = 5 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 5. \tag{7}$$

A derivada de $y(x)$ é

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2(e^{-x} - xe^{-x}).$$

Usando a outra condição inicial,

$$y'(0) = -3 \quad \Longrightarrow \quad -c_1 + c_2 = -3. \tag{8}$$

De (7) e (8) temos $c_1 = 5$ e $c_2 = 2$.

Portanto, a solução do PVI é

$$y(x) = 5e^{-x} + 2xe^{-x}.$$

Equações Lineares Homogêneas de Ordem Superior

Consideremos agora uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$ da forma

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{9}$$

em que $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ são funções contínuas em um intervalo I.

Equações Lineares Homogêneas de Ordem Superior

Consideremos agora uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$ da forma

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{9}$$

em que $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ são funções contínuas em um intervalo I.

Teorema 3 (Solução Geral - Equações Homogêneas)

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea (9), então a sua solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias.

Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Considere uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$ com coeficientes constantes ($a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{10}$$

Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Considere uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$ com coeficientes constantes ($a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{10}$$

De modo análogo ao caso $n = 2$, procuramos soluções não nula de (10) da forma

$$y(x) = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),$$

em que r é solução da **equação característica**:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Se as n raízes $r_1, r_2, \dots, r_n$ da equação característica forem todas reais e distintas, então a solução geral da EDO (10) é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x},$$

em que $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes arbitrárias.

Se as n raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ da equação característica forem todas reais e distintas, então a solução geral da EDO (10) é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x},$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias.

Se a equação característica possui raízes complexas, elas sempre aparecem em pares conjugados da forma

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mu \neq 0),$$

e a solução geral de (10) contém a combinação linear

$$c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x,$$

com c_1, c_2 constantes.

Raízes Repetidas

Quando r_1 é uma raiz real de multiplicidade k da equação característica (isto é, k raízes repetidas iguais a r_1), as k soluções LI de (10) correspondentes a r_1 são

$$e^{r_1 x}, \; xe^{r_1 x}, \; \ldots \; , \; x^{k-1} e^{r_1 x}$$

e a solução geral de (10) contém a combinação linear

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \ldots + c_k x^{k-1} e^{r_1 x}.$$

Raízes Repetidas

Quando r_1 é uma raiz real de multiplicidade k da equação característica (isto é, k raízes repetidas iguais a r_1), as k soluções LI de (10) correspondentes a r_1 são

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ \ldots\ ,\ x^{k-1}e^{r_1 x}$$

e a solução geral de (10) contém a combinação linear

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \ldots + c_k x^{k-1} e^{r_1 x}.$$

Se $r_1 = \lambda + i\mu$ é uma raiz complexa de multiplicidade k da equação característica, então a solução geral de (10) contém a combinação linear

$$c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x + x\left(c_3 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_4 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x\right) + \cdots$$
$$\cdots + x^{k-1}\left(c_{2k-1} e^{\lambda x} \cos \mu x + c_{2k} e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x\right),$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_{2k-1}, c_{2k}$ constantes.

Exemplo 4

Encontre a solução geral da EDO

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0.$$

Exemplo 4

Encontre a solução geral da EDO

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0.$$

Resolução: A equação é linear homogênea com coeficientes constantes. A equação característica é

$$r^6 + 2r^4 + r^2 = r^2(r^2 + 1)^2 = 0.$$

As raízes são $r_1 = 0$, $r_2 = i$ e $r_3 = -i$, todas de multiplicidade 2.

Exemplo 4

Encontre a solução geral da EDO

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0.$$

Resolução: A equação é linear homogênea com coeficientes constantes. A equação característica é

$$r^6 + 2r^4 + r^2 = r^2(r^2 + 1)^2 = 0.$$

As raízes são $r_1 = 0$, $r_2 = i$ e $r_3 = -i$, todas de multiplicidade 2. Para a raiz $r_1 = 0$, uma parte da solução geral é

$$y_1(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} = c_1 + c_2 x$$

e para as raízes complexas $r_2 = i$ e $r_3 = -i$, uma segunda parte da solução geral é

$$\begin{aligned} y_2(x) &= c_3 e^{0x} \cos x + c_4 e^{0x} \operatorname{sen} x + x(c_5 e^{0x} \cos x + c_6 e^{0x} \operatorname{sen} x) \\ &= c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + c_5 x \cos x + c_6 x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

e para as raízes complexas $r_2 = i$ e $r_3 = -i$, uma segunda parte da solução geral é

$$\begin{aligned} y_2(x) &= c_3 e^{0x} \cos x + c_4 e^{0x} \operatorname{sen} x + x(c_5 e^{0x} \cos x + c_6 e^{0x} \operatorname{sen} x) \\ &= c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + c_5 x \cos x + c_6 x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

A solução geral da EDO é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ &= c_1 + c_2 x + (c_3 + c_5 x) \cos x + (c_4 + c_6 x) \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Equações de Euler

Uma EDO de 2^a ordem da forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0, \tag{11}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada **equação de Euler**.

Equações de Euler

Uma EDO de 2^a ordem da forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0, \tag{11}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada **equação de Euler**.

Observe que (11) tem coeficientes variáveis e o grau de cada coeficiente coincide com a ordem de derivação.

Equações de Euler

Uma EDO de 2^a ordem da forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0, \tag{11}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada **equação de Euler**.

Observe que (11) tem coeficientes variáveis e o grau de cada coeficiente coincide com a ordem de derivação.

Queremos encontrar duas soluções LI de (11) para construírmos a sua solução geral. Assim, procuramos soluções de (11) da forma

$$y(x) = x^r \quad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } r \in \mathbb{C}).$$

Substituindo $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ e $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ em (11), temos

$$\begin{aligned} & ax^2\, r(r-1)x^{r-2} + bx\, rx^{r-1} + cx^r = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x^r\left[ar(r-1) + br + c\right] = 0 \end{aligned}$$

Substituindo $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ e $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ em (11), temos

$$\begin{aligned} & ax^2\, r(r-1)x^{r-2} + bx\, rx^{r-1} + cx^r = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x^r\,[ar(r-1) + br + c] = 0 \end{aligned}$$

Dividindo por $x^r \neq 0$, obtemos a **equação característica**:

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0. \tag{12}$$

Substituindo $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ e $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ em (11), temos

$$\begin{aligned} & ax^2\, r(r-1)x^{r-2} + bx\, rx^{r-1} + cx^r = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x^r \left[ar(r-1) + br + c\right] = 0 \end{aligned}$$

Dividindo por $x^r \neq 0$, obtemos a **equação característica**:

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0. \tag{12}$$

Note que: $y = x^r$ é solução de (11) $\iff$ r é solução de (12).

Substituindo $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ e $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ em (11), temos

$$\begin{aligned} & ax^2\, r(r-1)x^{r-2} + bx\, rx^{r-1} + cx^r = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x^r \left[ar(r-1) + br + c\right] = 0 \end{aligned}$$

Dividindo por $x^r \neq 0$, obtemos a **equação característica**:

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0. \tag{12}$$

Note que: $y = x^r$ é solução de (11) $\iff$ r é solução de (12).

Temos 3 casos a considerar para as duas raízes de (12) $\left(\Delta = (b-a)^2 - 4ac\right)$:

1. Raízes reais distintas ($\Delta > 0$): $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ com $r_1 \neq r_2$;
2. Raízes complexas conjugadas ($\Delta < 0$): $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ com $r_2 = \overline{r_1}$;
3. Raízes repetidas ($\Delta = 0$): $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ com $r_1 = r_2$.

Caso 1: Se as raízes r_1 e r_2 de (12) são reais e distintas, então temos duas soluções de (11), $y_1 = x^{r_1}$ e $y_2 = x^{r_2}$, as quais são LI pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0, \ \forall x.$$

Caso 1: Se as raízes r_1 e r_2 de (12) são reais e distintas, então temos duas soluções de (11), $y_1 = x^{r_1}$ e $y_2 = x^{r_2}$, as quais são LI pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0, \ \forall x.$$

Portanto, a solução geral da equação de Euler (11) é

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \quad (c_1, c_2 \text{ constantes}).$$

Caso 1: Se as raízes r_1 e r_2 de (12) são reais e distintas, então temos duas soluções de (11), $y_1 = x^{r_1}$ e $y_2 = x^{r_2}$, as quais são LI pois

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0, \ \forall x.$$

Portanto, a solução geral da equação de Euler (11) é

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \quad (c_1, c_2 \text{ constantes}).$$

Caso 2: Se as raízes de (12) são complexas conjugadas,

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad r_2 = \alpha - i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0),$$

então, como no Caso 1, temos duas soluções complexas LI de (11):

$$y_1 = x^{\alpha+i\beta} \quad \text{e} \quad y_2 = x^{\alpha-i\beta}.$$

Como queremos soluções reais, usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, podemos escrevê-las como

$$y_1(x) = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta\ln x} = x^\alpha(\cos(\beta\ln x) + i\,\mathrm{sen}(\beta\ln x)),$$

$$y_2(x) = x^\alpha x^{-i\beta} = x^\alpha e^{-i\beta\ln x} = x^\alpha(\cos(\beta\ln x) - i\,\mathrm{sen}(\beta\ln x)).$$

Como queremos soluções reais, usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, podemos escrevê-las como

$$y_1(x) = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha(\cos(\beta \ln x) + i\,\text{sen}(\beta \ln x)),$$

$$y_2(x) = x^\alpha x^{-i\beta} = x^\alpha e^{-i\beta \ln x} = x^\alpha(\cos(\beta \ln x) - i\,\text{sen}(\beta \ln x)).$$

Escolhendo a parte real e a parte imaginária de y_1 ou de y_2, pelo Teorema 11 da Aula 5, obtemos duas soluções reais de (11):

$$\tilde{y}_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(x) = x^\alpha\,\text{sen}(\beta \ln x)),$$

que são LI, pois $W(\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$.

Como queremos soluções reais, usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, podemos escrevê-las como

$$y_1(x) = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha(\cos(\beta \ln x) + i\,\text{sen}(\beta \ln x)),$$

$$y_2(x) = x^\alpha x^{-i\beta} = x^\alpha e^{-i\beta \ln x} = x^\alpha(\cos(\beta \ln x) - i\,\text{sen}(\beta \ln x)).$$

Escolhendo a parte real e a parte imaginária de y_1 ou de y_2, pelo Teorema 11 da Aula 5, obtemos duas soluções reais de (11):

$$\tilde{y}_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(x) = x^\alpha\,\text{sen}(\beta \ln x)),$$

que são LI, pois $W(\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)) = \beta x^{2\alpha - 1} \neq 0$.

Portanto, a solução geral da equação de Euler (11) é dada por

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha\,\text{sen}(\beta \ln x), \quad x > 0,$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Caso 3: Se as raízes de (12) são repetidas, $r_1 = r_2 = -(b-a)/2a$, então obtemos somente uma solução $y_1 = x^{r_1}$ de (11).

Caso 3: Se as raízes de (12) são repetidas, $r_1 = r_2 = -(b-a)/2a$, então obtemos somente uma solução $y_1 = x^{r_1}$ de (11).
Dividindo (11) por $ax^2 \neq 0$ e aplicando o método de redução de ordem (relação (5)), segue que uma segunda solução é

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = x^{r_1} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{x^{2r_1}} dx \\ &= x^{r_1} \int \frac{e^{-\frac{b}{a} \ln x}}{x^{2r_1}} dx = x^{r_1} \int x^{-b/a} x^{-2r_1} \, dx \\ &= x^{r_1} \int x^{-1} \, dx = x^{r_1} \ln x. \end{aligned}$$

Caso 3: Se as raízes de (12) são repetidas, $r_1 = r_2 = -(b-a)/2a$, então obtemos somente uma solução $y_1 = x^{r_1}$ de (11).
Dividindo (11) por $ax^2 \neq 0$ e aplicando o método de redução de ordem (relação (5)), segue que uma segunda solução é

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = x^{r_1} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{x^{2r_1}} dx \\ &= x^{r_1} \int \frac{e^{-\frac{b}{a} \ln x}}{x^{2r_1}} dx = x^{r_1} \int x^{-b/a} x^{-2r_1} \, dx \\ &= x^{r_1} \int x^{-1} \, dx = x^{r_1} \ln x. \end{aligned}$$

Note que y_1 e y_2 são LI, pois $W(y_1(x), y_2(x)) = x^{2r_1 - 1} \neq 0$ para todo x.

Caso 3: Se as raízes de (12) são repetidas, $r_1 = r_2 = -(b-a)/2a$, então obtemos somente uma solução $y_1 = x^{r_1}$ de (11).
Dividindo (11) por $ax^2 \neq 0$ e aplicando o método de redução de ordem (relação (5)), segue que uma segunda solução é

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = x^{r_1} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{x^{2r_1}} dx \\ &= x^{r_1} \int \frac{e^{-\frac{b}{a} \ln x}}{x^{2r_1}} dx = x^{r_1} \int x^{-b/a} x^{-2r_1} \, dx \\ &= x^{r_1} \int x^{-1} \, dx = x^{r_1} \ln x. \end{aligned}$$

Note que y_1 e y_2 são LI, pois $W(y_1(x), y_2(x)) = x^{2r_1 - 1} \neq 0$ para todo x.
Portanto, a solução geral de (11) é dada por

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x, \quad x > 0,$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 5

Determine a solução geral de cada uma das equações de Euler:

1. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0;$
2. $x^2y'' + 2xy' + 0,25y = 0, \quad x > 0.$

Exemplo 5

Determine a solução geral de cada uma das equações de Euler:

1. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0;$
2. $x^2y'' + 2xy' + 0,25y = 0, \quad x > 0.$

Resolução: 1. Procuramos solução da equação da forma $y = x^r$. Derivando duas vezes, temos

$$y' = rx^{r-1} \quad \text{e} \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Exemplo 5

Determine a solução geral de cada uma das equações de Euler:

1. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0;$
2. $x^2y'' + 2xy' + 0,25y = 0, \quad x > 0.$

Resolução: 1. Procuramos solução da equação da forma $y = x^r$. Derivando duas vezes, temos

$$y' = rx^{r-1} \quad \text{e} \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Substituindo na equação, resulta

$$\begin{aligned}
& 2x^2\, r(r-1)x^{r-2} + 3x\, rx^{r-1} - x^r = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x^r\,[2r(r-1) + 3r - 1] = 0 \\
\Longrightarrow\quad & 2r^2 + r - 1 = 0 \\
\Longrightarrow\quad & r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}
\end{aligned}$$

Logo, as raízes da equação característica são $r_1 = 1/2$ e $r_2 = -1$. Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}, \quad x > 0.$$

Logo, as raízes da equação característica são $r_1 = 1/2$ e $r_2 = -1$. Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}, \quad x > 0.$$

---

2. Analogamente ao item 1, substituindo $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ e $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ na equação, resulta

$$\begin{aligned} & x^2\, r(r-1)x^{r-2} + 2x\, rx^{r-1} + 0,25x^r = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x^r\left[r(r-1) + 2r + 0,25\right] = 0 \\ \Longrightarrow \quad & r^2 + r + 0,25 = 0 \\ \Longrightarrow \quad & r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2} = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Logo, a única raiz da equação característica é $r_1 = -1/2$.

Logo, as raízes da equação característica são $r_1 = 1/2$ e $r_2 = -1$. Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}, \quad x > 0.$$

---

2. Analogamente ao item 1, substituindo $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ e $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ na equação, resulta

$$\begin{aligned}
& x^2\, r(r-1)x^{r-2} + 2x\, rx^{r-1} + 0,25x^r = 0 \\
\Longrightarrow \quad & x^r\,[r(r-1) + 2r + 0,25] = 0 \\
\Longrightarrow \quad & r^2 + r + 0,25 = 0 \\
\Longrightarrow \quad & r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25}}{2} = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Logo, a única raiz da equação característica é $r_1 = -1/2$. Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1/2} \ln x, \quad x > 0.$$

Equações de Euler de Ordem Superior

Uma **equação de Euler** de ordem $n \geq 2$ é uma equação da forma

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0, \quad x > 0, \tag{13}$$

em que $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

Equações de Euler de Ordem Superior

Uma **equação de Euler** de ordem $n \geq 2$ é uma equação da forma

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0, \quad x > 0, \tag{13}$$

em que $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

O método de resolução de (13) é análogo ao caso $n = 2$, ou seja, procuramos soluções de (13) da forma

$$y(x) = x^r \quad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } r \in \mathbb{C}),$$

e a solução geral é construída de acordo com as raízes da correspondente equação característica associada a (13).

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de redução de ordem, o qual pode ser aplicado às EDOs lineares homogêneas de 2^a ordem, para obter a partir de uma solução conhecida, uma segunda solução da equação, LI com a primeira.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de redução de ordem, o qual pode ser aplicado às EDOs lineares homogêneas de 2^a ordem, para obter a partir de uma solução conhecida, uma segunda solução da equação, LI com a primeira.

Aplicamos o método de redução de ordem para encontrar a solução geral de uma EDO homogênea com coeficientes constantes, no caso em que a equação característica possui raízes repetidas. Vimos também a solução geral de equações homogêneas de ordem superior.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de redução de ordem, o qual pode ser aplicado às EDOs lineares homogêneas de 2^a ordem, para obter a partir de uma solução conhecida, uma segunda solução da equação, LI com a primeira.

Aplicamos o método de redução de ordem para encontrar a solução geral de uma EDO homogênea com coeficientes constantes, no caso em que a equação característica possui raízes repetidas. Vimos também a solução geral de equações homogêneas de ordem superior.

Finalmente, estudamos as equações de Euler, as quais podem ser resolvidas de forma similar às equações homogêneas com coeficientes constantes.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de redução de ordem, o qual pode ser aplicado às EDOs lineares homogêneas de 2^a ordem, para obter a partir de uma solução conhecida, uma segunda solução da equação, LI com a primeira.

Aplicamos o método de redução de ordem para encontrar a solução geral de uma EDO homogênea com coeficientes constantes, no caso em que a equação característica possui raízes repetidas. Vimos também a solução geral de equações homogêneas de ordem superior.

Finalmente, estudamos as equações de Euler, as quais podem ser resolvidas de forma similar às equações homogêneas com coeficientes constantes.

Muito grato pela atenção!