Cálculo III

Aula 5 – Equações Lineares de Segunda Ordem.
Equações Lineares Homogêneas; Wronskiano.
Raízes Reais Distintas e Raízes Complexas da Eq. Característica.

Marcos Eduardo Valle e
Roberto de Almeida Prado
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula de hoje iniciaremos o estudo das EDOs lineares de ordem 2.

Na forma mais geral, uma EDO de ordem $n \geq 2$ é dada implicitamente pela equação

$$y^{(n)} = \Phi\left(x, y, \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1}$$

em que Φ depende da variável independente x, da variável dependente $y \equiv y(x)$ e de suas derivadas $y', \ldots, y^{(n-1)}$.

EDOs Lineares de 2^a Ordem

Uma EDO de 2^a ordem

$$y'' = \Phi(x, y, y')$$

é dita **linear** se a função Φ é linear em y e y', ou seja, a equação pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{2}$$

ou

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x), \tag{3}$$

em que as funções p, q, f, A, B, C e F dependem somente de x, e $A(x) \neq 0$.

Se a EDO $y'' = \Phi(x, y, y')$ não é da forma (2) ou (3), então ela é dita **não linear**.

Exemplo 1

1. A EDO
$$e^x y'' + (\cos x)y' + (1 + \sqrt{x})y = 5x,$$
é linear, pois é da forma (3) com
$$A(x) = e^x \neq 0, \quad B(x) = \cos x, \quad C(x) = 1 + \sqrt{x} \;\text{ e }\; F(x) = 5x.$$
2. A equação
$$y'' + 3(y')^2 + 4y^3 = 0$$
é não linear, devido aos termos $(y')^2$ e y^3.

Teorema 2 (Existência e Unicidade da Solução)

Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad e \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{4}$$

Se p, q e f são funções contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto x_0, então para quaisquer $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, o PVI (4) admite uma única solução $y \equiv y(x)$ definida em I.

Observação 1:

Para determinar a solução de um PVI envolvendo uma EDO linear de 2^a ordem é preciso considerar duas condições iniciais como em (4).

Equações Lineares Homogêneas

Definição 3 (EDO Linear Homogênea)

Uma equação linear de 2^a ordem da forma (2) ou (3) é dita **homogênea** se $f(x) = 0$ ou $F(x) = 0$ para todo x, ou seja, a EDO pode ser escrita como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{ou} \quad A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0.$$

Caso contrário, a equação é dita **não homogênea**.

Observação 2:

O termo "equação homogênea" tem significados diferentes para EDOs de 1^a ordem, ou seja, uma equação homogênea do tipo $y' = f(y/x)$ (veja Aula 2) é diferente de uma equação linear homogênea $y' + q(x)y = 0$. No caso de EDOs lineares de ordem $n \geq 2$, equação homogênea refere-se à equação linear homogênea, como na Def. 3.

Princípio da Superposição de Soluções

Teorema 4 (Princípio da Superposição)

Se y_1 e y_2 são ambas soluções da equação homogênea

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

em um intervalo I, então qualquer combinação linear

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (c_1, c_2 \text{ constantes}),$$

é também solução da EDO em I.

Princípio da Superposição de Soluções

Teorema 4 (Princípio da Superposição)

Se y_1 e y_2 são ambas soluções da equação homogênea

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

em um intervalo I, então qualquer combinação linear

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (c_1, c_2 \text{ constantes}),$$

é também solução da EDO em I.

Demonstração: Se y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea, então para todo $x \in I$,

$$A(x)y_1'' + B(x)y_1' + C(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad A(x)y_2'' + B(x)y_2' + C(x)y_2 = 0.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} & A(x)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)'' + B(x)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)' + C(x)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) \\ = \; & c_1 \Big(A(x) y_1'' + B(x) y_1' + C(x) y_1 \Big) + c_2 \Big(A(x) y_2'' + B(x) y_2' + C(x) y_2 \Big) \\ = \; & c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, ou seja, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é solução da EDO em I.

Exemplo 5

As funções $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ são ambas soluções da EDO homogênea

$$y'' + y = 0$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$. De fato, para todo $x \in (-\infty, \infty)$ tem-se $y_1'(x) = -\operatorname{sen} x$, $y_1''(x) = -\cos x$ e

$$y_1''(x) + y_1(x) = -\cos x + \cos x = 0,$$

o que mostra que y_1 é solução da EDO. Analogamente para y_2.
Pelo Teorema 4,

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

é também solução da EDO em $(-\infty, \infty)$, para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6

Sabendo que

$$y_1(x) = e^x \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^x$$

são ambas soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0$$

em $(-\infty, \infty)$, determine a solução da EDO que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 3 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$$

Exemplo 6

Sabendo que

$$y_1(x) = e^x \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^x$$

são ambas soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0$$

em $(-\infty, \infty)$, determine a solução da EDO que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 3 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$$

Resolução: Como y_1 e y_2 são soluções em $(-\infty, \infty)$, pelo Teorema 4

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (c_1, c_2 \text{ constantes}),$$

também é solução da EDO em $(-\infty, \infty)$. Impondo a condição inicial $y(0) = 3$, implica

$$c_1 e^0 + c_2 0 e^0 = 3 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 3.$$

Substituindo $c_1 = 3$ em $y(x)$ e derivando temos:

$$y'(x) = 3e^x + c_2(e^x + xe^x).$$

Agora, usando a outra condição inicial $y'(0) = 1$, vem que

$$3e^0 + c_2(e^0 + 0e^0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 3 + c_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -2.$$

Assim, encontramos a solução do PVI:

$$y(x) = 3e^x - 2xe^x$$

definida no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Como as funções $p(x) = -2$, $q(x) = 1$ e $f(x) = 0$ são contínuas em $(-\infty, \infty)$ e $x_0 = 0 \in (-\infty, \infty)$, pelo Teorema 2 esta $y(x)$ é a única solução do PVI.

De um modo geral, suponha que

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

é uma solução de uma EDO linear de 2^a ordem homogênea.

Impondo as condições iniciais

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y_0',$$

obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

com as incógnitas sendo os coeficientes c_1 e c_2.

Equivalentemente, temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

Concluindo, considere o PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y_0',$$

em que p e q são funções contínuas num intervalo aberto I contendo x_0.

Conhecendo soluções y_1 e y_2, conseguiremos determinar a única solução do PVI no intervalo I usando

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix},$$

admitir uma única solução (c_1 e c_2).

Wronskiano

Com base no resultado acima, a combinação linear

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

das soluções y_1 e y_2, é a única solução do PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y_0',$$

para qualquer $x_0 \in I$, se o determinante (chamado **wronskiano**)

$$W(y_1(x), y_2(x)) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

for diferente de zero para todo $x \in I$.

Critério para soluções LI

Sejam y_1 e y_2 soluções da equação linear homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ num intervalo I. Tem-se que y_1 e y_2 são linearmente independentes (LI) em $I \iff W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0, \ \forall x \in I$.

Solução Geral - Equações Homogêneas

Teorema 7 (Solução Geral de uma EDO Homogênea)

Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da EDO linear homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

em que p e q são ambas funções contínuas em um intervalo I, então a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x \in I,$$

com c_1 e c_2 constantes reais.

Exemplo 8

A equação linear homogênea $y'' - 9y = 0$ possui duas soluções $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = e^{-3x}$ em $I = (-\infty, \infty)$. Temos o Wronskiano

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{3x}e^{-3x} - 3e^{3x}e^{-3x} = -6 \neq 0,$$

para todo $x \in (-\infty, \infty)$. Pelo critério acima, y_1 e y_2 são LI em $(-\infty, \infty)$. Portanto, pelo Teorema 7, a solução geral da equação $y'' - 9y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$ é

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Considere uma EDO linear homogênea de 2^a ordem com coeficientes constantes ($a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \neq 0$):

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{5}$$

Queremos encontrar duas soluções LI da eq.(5) para construírmos a solução geral y como no Teorema 7. Dessa forma, procuramos soluções de (5) da forma

$$y(x) = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } r \in \mathbb{C}).$$

Substituindo $y(x)$ e suas derivadas $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2 e^{rx}$ na eq.(5) e usando que $e^{rx} \neq 0$, obtemos

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0, \tag{6}$$

que é chamada **equação característica** para a EDO (5).

Note que:

$$y(x) = e^{rx} \text{ é solução da EDO (5)} \iff r \text{ é solução de (6).}$$

A equação característica (6) possui duas raízes r_1 e r_2. Temos 3 casos a considerar $\left(\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0\right)$:

1. Raízes reais distintas ($\Delta > 0$): $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ com $r_1 \neq r_2$;
2. Raízes complexas conjugadas ($\Delta < 0$): $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ com $r_2 = \overline{r_1}$;
3. Raízes reais repetidas ($\Delta = 0$): $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ com $r_1 = r_2$.

Vamos construir a solução geral da eq.(5) em cada um desses casos.

Raízes Reais Distintas da Equação Característica

Se a equação característica (6) possui duas raízes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ com $r_1 \neq r_2$, então encontramos duas soluções da EDO (5):

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

que são LI no intervalo $(-\infty, \infty)$, pois

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0, \; \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Pelo Teorema 7 a solução geral de (5) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 9

Encontre a solução geral da equação

$$2y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Exemplo 9

Encontre a solução geral da equação

$$2y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Resolução: A equação característica é

$$2r^2 - 5r - 3 = 0.$$

As raízes desta equação do segundo grau são

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}.$$

Temos duas raízes reais e distintas $r_1 = 3$ e $r_2 = -1/2$.
Portanto, a solução geral da equação dada é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x/2},$$

com c_1, c_2 constantes.

Exemplo 10

Determine a solução do PVI

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3.$$

Exemplo 10

Determine a solução do PVI

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3.$$

Resolução: A equação característica é

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

e suas raízes são

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}.$$

Temos duas raízes reais e distintas $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$.
Portanto, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x},$$

com c_1, c_2 constantes.

Impondo a condição inicial $y(0) = 2$, implica

$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = 2 \quad \Longrightarrow \quad c_1 + c_2 = 2. \quad (*)$$

Por outro lado, a derivada de y é $y'(x) = -2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x}$. Usando a outra condição inicial $y'(0) = 3$, vem que

$$-2c_1 e^0 - 3c_2 e^0 = 3 \quad \Longrightarrow \quad -2c_1 - 3c_2 = 3. \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$, obtém-se $c_1 = 9$ e $c_2 = -7$.
Portanto, a solução do PVI é

$$y(x) = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Raízes Complexas da Equação Característica

Se a equação característica (6) possui duas raízes complexas conjugadas

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mu \neq 0),$$

então como no caso real, temos duas soluções LI $(r_1 \neq r_2)$

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

e a solução geral da EDO (5) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{(\lambda + i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)x}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Porém, $y(x)$ é uma função complexa e queremos que a solução y seja real.

Para obtermos a solução geral $y(x)$ sendo uma função real, usaremos o seguinte resultado:

Teorema 11

Considere a equação homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{7}$$

em que p e q são funções reais contínuas. Se $y = u(x) + iv(x)$ é uma solução complexa de (7), então suas partes real u e imaginária v também são soluções de (7).

Para obtermos a solução geral $y(x)$ sendo uma função real, usaremos o seguinte resultado:

Teorema 11

Considere a equação homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{7}$$

em que p e q são funções reais contínuas. Se $y = u(x) + iv(x)$ é uma solução complexa de (7), então suas partes real u e imaginária v também são soluções de (7).

Demonstração: Se $y = u(x) + iv(x)$ é solução de (7), então

$$\begin{aligned} & u'' + iv'' + p(x)(u' + iv') + q(x)(u + iv) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & u'' + p(x)u' + q(x)u + i(v'' + p(x)v' + q(x)v) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & u'' + p(x)u' + q(x)u = 0 \quad \text{e} \quad v'' + p(x)v' + q(x)v = 0, \end{aligned}$$

ou seja, u e v são soluções reais de (7).

Voltando nas duas soluções complexas $y_1 = e^{(\lambda+i\mu)x}$ e $y_2 = e^{(\lambda-i\mu)x}$ da eq.(5), e usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, com $\theta = \pm\mu x$, podemos escrevê-las como

$$y_1(x) = e^{\lambda x}(\cos\mu x + i\,\text{sen}\,\mu x) \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\lambda x}(\cos\mu x - i\,\text{sen}\,\mu x).$$

Escolhendo a parte real e a parte imaginária de y_1 ou de y_2, pelo Teorema 11 obtemos duas soluções reais da eq.(5):

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\lambda x}\cos\mu x \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(x) = e^{\lambda x}\,\text{sen}\,\mu x,$$

que são LI, pois $W(\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)) = \mu e^{2\lambda x} \neq 0$.

Portanto, pelo Teorema 7, a solução geral de (5) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x}\cos\mu x + c_2 e^{\lambda x}\,\text{sen}\,\mu x, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 12

Determine a solução geral da EDO

$$y'' + y' + y = 0.$$

Exemplo 12

Determine a solução geral da EDO

$$y'' + y' + y = 0.$$

Resolução: A equação característica é

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

As raízes desta equação são (usando $i = \sqrt{-1}$):

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}.$$

Temos duas raízes complexas $r_1 = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2$ e $r_2 = (-1 - \sqrt{3}\, i)/2$. Portanto, a solução geral da equação é

$$y = c_1 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),$$

com c_1, c_2 constantes.

Exemplo 13

Encontre a solução do PVI

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 5.$$

Exemplo 13

Encontre a solução do PVI

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 5.$$

Resolução: A equação característica é

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

e suas raízes são dadas por (usando $i = \sqrt{-1}$):

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 2 \pm i.$$

Temos duas raízes complexas $r_1 = 2 + i$ e $r_2 = 2 - i$.
Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x,$$

com c_1, c_2 constantes.

Impondo a condição inicial $y(0) = 1$, implica

$$c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \operatorname{sen} 0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 1. \quad (*)$$

Por outro lado, a derivada de y é

$$y'(x) = c_1(2e^{2x} \cos x - e^{2x} \operatorname{sen} x) + c_2(2e^{2x} \operatorname{sen} x + e^{2x} \cos x).$$

Usando a outra condição inicial $y'(0) = 5$, vem que

$$c_1(2e^0 \cos 0 - e^0 \operatorname{sen} 0) + c_2(2e^0 \operatorname{sen} 0 + e^0 \cos 0) = 5$$

$$\Longrightarrow \quad 2c_1 + c_2 = 5. \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ temos $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$. Portanto, a solução do PVI é

$$y(x) = e^{2x} \cos x + 3e^{2x} \operatorname{sen} x, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje iniciamos o estudo das EDOs lineares de 2^a ordem. Especificamente, apresentamos:

- o teorema de existência e unicidade da solução de um PVI;
- as equações lineares homogêneas, princípio de superposição das soluções e a solução geral;
- o wronskiano e um critério para soluções LI da equação homogênea;
- a solução geral das equações homogêneas com coeficientes constantes, quando a equação característica tem raízes reais distintas ou raízes complexas.

Na próxima aula estudaremos o caso das raízes repetidas da equação característica.

Muito grato pela atenção!

Material Complementar

Equações Lineares de Ordem Superior

Equações Lineares de Ordem Superior

De um modo geral, uma EDO **linear** de ordem $n \geq 2$ pode ser escrita como

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x),$$

com $P_0(x) \neq 0$, ou equivalentemente,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{8}$$

Teorema 14 (Existência e Unicidade da Solução)

Se $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e f são funções contínuas em um intervalo aberto I contendo um ponto x_0 então, dados $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, a EDO (8) admite uma única solução em I que satisfaz as condições iniciais

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Definição 15 (Equação Homogênea)

Uma EDO linear de ordem $n \geq 2$ é dita **homogênea** se pode ser escrita como

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0,$$

com $P_0(x) \neq 0$, ou

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

Teorema 16 (Princípio da Superposição)

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são n soluções de uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$, então a combinação linear

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n \quad (c_1, \ldots, c_n \text{ constantes}),$$

é também uma solução da EDO.

Definição 17 (Wronskiano)

O **Wronskiano** das funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$, todas $n-1$ vezes deriváveis num intervalo, é o determinante

$$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Critério para soluções LI

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluções da equação linear homogênea $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$ num intervalo I. Tem-se que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são linearmente independentes (LI) em I se, e somente se, $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0, \ \forall x \in I$.

Teorema 18 (Solução Geral - Equações Homogêneas)

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções LI da EDO linear homogênea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

em que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são funções contínuas em um intervalo I, então qualquer outra solução da EDO pode ser escrita como

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_2(x),$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes reais.

Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Considere uma EDO linear homogênea de ordem $n \geq 2$ com coeficientes constantes ($a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{9}$$

De modo análogo ao caso $n = 2$, procuramos soluções não nula de (9) da forma

$$y(x) = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),$$

em que r é solução da **equação característica**:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Se as n raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ da equação característica forem todas reaais e distintas, então a solução geral da EDO (9) é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x},$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias.

Se a equação característica possui raízes complexas, elas sempre aparecem em pares conjugados da forma

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mu \neq 0),$$

e a solução geral de (9) contém a combinação linear

$$c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x,$$

com c_1, c_2 constantes.

Exemplo 19

Encontre a solução do PVI

$$y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad y''(0) = 70.$$

Exemplo 19

Encontre a solução do PVI

$$y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad y''(0) = 70.$$

Resolução: A equação característica da EDO é

$$r^3 + 3r^2 - 10r = 0 \quad \Longrightarrow \quad r(r+5)(r-2) = 0.$$

Temos 3 raízes reais e distintas $r_1 = 0$, $r_2 = -5$ e $r_3 = 2$.
Portanto, a solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x},$$

com c_1, c_2, c_3 constantes.

Derivando $y(x)$ duas vezes temos:

$$y'(x) = -5c_2e^{-5x} + 2c_3e^{2x} \quad \text{e} \quad y''(x) = 25c_2e^{-5x} + 4c_3e^{2x}.$$

Usando as 3 condições iniciais dadas, resulta no sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 7 \\ -5c_2 + 2c_3 = 0 \\ 25c_2 + 4c_3 = 70 \,, \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ e $c_3 = 5$.
Concluímos que a solução do PVI é dada por

$$y(x) = 2e^{-5x} + 5e^{2x}.$$

Exemplo 20

Determine a solução geral da EDO

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

Exemplo 20

Determine a solução geral da EDO

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

Resolução: A equação característica é

$$r^4 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt[4]{-4}.$$

As raízes quarta de $z = -4$ em $\mathbb{C}$ são dadas por:

$$z_k = \sqrt[4]{|-4|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

em que $\theta = \arg(-4) = \pi$.

Asim, as 4 raízes da eq. característica em pares conjugados são:

$$r_1 = z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i,$$

$$r_2 = z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i,$$

$$r_3 = z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i,$$

$$r_4 = z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i.$$

A solução geral da EDO é

$$y(x) = e^{x}\left(c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x\right) + e^{-x}\left(c_3\cos x + c_4\,\text{sen}\,x\right),$$

com c_1, c_2, c_3, c_4 constantes.