Cálculo III

Aula 4 – Teorema de Existência e Unicidade. Redução de Ordem.

Marcos Eduardo Valle e
Roberto de Almeida Prado
IMECC – Unicamp

Introdução

Nas aulas anteriores estudamos alguns métodos de resolução para determinadas classes de EDOs de primeira ordem, como as equações lineares, equações separáveis, equações exatas, entre outras.

Na aula de hoje focaremos nossa atenção em uma questão primordial: a existência e unicidade da solução de um problema de valor inicial (PVI) de primeira ordem. Apresentaremos também dois tipos de EDOs de segunda ordem que podem ser reduzidas, através de mudança de variável, em EDOs de primeira ordem.

Para discutirmos o problema de existência e unicidade da solução, começamos apresentando dois exemplos.

Exemplo 1

O PVI

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(0) = 0,$$

não admite solução.

Com efeito, a solução da EDO é

$$y(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (c \text{ constante}),$$

a qual não está definida para $x = 0$. Portanto, ela não pode satisfazer a condição inicial $y(0) = 0$.

Exemplo 2

O PVI

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 0,$$

admite duas soluções, definidas no intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$y_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(x) = \frac{1}{16}x^4.$$

A solução y_2 é obtida resolvendo a EDO separável e usando a condição inicial. De fato,

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \implies \int y^{-1/2}dy = \int xdx \implies 2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_0$$
$$\implies y = (x^2 + c)^2/16.$$

Impondo $y(0) = 0$, implica $c = 0$ e obtém-se a solução y_2 do PVI.

Teorema 3 (Existência e Unicidade da Solução – PVI linear)

Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$y' + p(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I contendo o ponto x_0, e $y_0 \in \mathbb{R}$ é um valor inicial dado, então o PVI (1) *tem uma única solução $y \equiv y(x)$ definida para cada $x \in I$.*

Conforme vimos na Aula 1, essa única solução do PVI (1) é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)\,ds + y_0\right], \quad x \in I,$$

com o fator integrante $\mu(x) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right\}$.

Exemplo 4

Use o Teorema 3 para encontrar um intervalo no qual o PVI

$$xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 2,$$

tem uma única solução.

Exemplo 4

Use o Teorema 3 para encontrar um intervalo no qual o PVI

$$xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 2,$$

tem uma única solução.

Resolução: Dividindo a equação por x, temos

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x \; .$$

As funções $p(x) = 2/x$ e $g(x) = 4x$ são contínuas no intervalo $I = (0, \infty)$ e $x_0 = 1 \in I$. Portanto, pelo Teorema 3, o PVI tem uma única solução definida no intervalo $I = (0, \infty)$. De fato, no Exemplo 6 da Aula 1, vimos que a solução deste PVI é

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} \; , \quad x > 0.$$

No caso de EDOs não lineares, o Teorema 3 é substituído pelo seguinte teorema geral:

Teorema 5 (Existência e Unicidade da Solução – PVI geral)

Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

para uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*. Se* f *e sua derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas em uma região retangular*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta\},$$

que contém o ponto (x_0, y_0)*, então o PVI* (2) *admite uma única solução* $y \equiv y(x)$ *definida para todo* x *num intervalo* $I \subset (\alpha, \beta)$ *que contém* x_0*.*

Observe que se as hipóteses do Teorema 5 são satisfeitas, então o PVI (2) tem uma única solução y em algum intervalo contendo x_0. Por outro lado, se essas hipóteses não são satisfeitas, então o PVI (2) pode ter ou não solução, ter mais de uma solução ou ter uma única solução.

A demonstração do Teorema 5 utiliza o **método das aproximações sucessivas**, também chamado **método iterativo de Picard**, e está baseada na formulação do PVI (2) em termos da equação integral:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)\, ds \,, \tag{3}$$

ou seja, y é solução do PVI (2) $\iff$ y é solução de (3).

Para mais detalhes veja o livro-texto “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, autores William E. Boyce e Richard C. Diprima".

O Teorema 5 pode ser aplicado no caso de um PVI linear (como no Teorema 3):

$$y' + p(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4}$$

em que p e g são contínuas num intervalo aberto I com $x_0 \in I$.

Neste caso, as funções $f(x,y) = -p(x)y + g(x)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -p(x)$ são contínuas em $I \times \mathbb{R}$ e o ponto $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Pelo Teorema 5 o PVI (4) tem uma única solução y definida num intervalo $J \subset I$ com $x_0 \in J$.

É importante ressaltar que no caso do PVI linear (4) o Teorema 3 garante que o intervalo da solução é $J = I$.

Exemplo 6

Vimos no Exemplo 2 que o PVI

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 0,$$

admite duas soluções distintas y_1 e y_2. Logo, as hipóteses do Teorema 5 não podem ser satisfeitas.
Com efeito, as funções $f(x,y) = x\sqrt{y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y}}$ são contínuas no semiplano superior $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$, que não contém o ponto $(0,0)$.

Por outro lado, concluímos do Teorema 5 que o PVI

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0,$$

com qualquer $y_0 > 0$, tem uma única solução $y(x)$ definida num intervalo contendo x_0.

Exemplo 7

Considere o PVI

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Note que as funções

$$f(x,y) = y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$, que contém o ponto $(0,1)$. Pelo Teorema 5, o PVI admite uma única solução $y \equiv y(x)$ para x em um intervalo I contendo $x_0 = 0$. De fato, resolvendo a equação separável e impondo a condição inicial, obtém-se que a única solução do PVI é

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1,$$

que está definida no intervalo $I = (-\infty, 1)$.

Exemplo 8

Considere o PVI

$$xy' = 2y, \quad y(a) = b.$$

Avalie a existência e unicidade da solução em cada um dos seguintes casos:

(a) $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ (qualquer);

(b) $a = 0$ e $b \neq 0$;

(c) $a = 0$ e $b = 0$.

Exemplo 8

Considere o PVI

$$xy' = 2y, \quad y(a) = b.$$

Avalie a existência e unicidade da solução em cada um dos seguintes casos:

(a) $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ (qualquer);

(b) $a = 0$ e $b \neq 0$;

(c) $a = 0$ e $b = 0$.

Resolução: Neste PVI tem-se

$$f(x,y) = \frac{2y}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{x},$$

que são contínuas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $x \neq 0$ (exclui-se o eixo y).

Pelo Teorema 5 (de existência e unicidade da solução) concluímos que: (a) se $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, o PVI possui uma única solução y, definida num intervalo contendo a.

Quando $a = 0$, o Teorema 5 não se aplica, pois f e $\partial f/\partial y$ não são contínuas nos pontos $(0, b)$. Neste caso, resolvendo a equação por separação de variáveis, obtemos a solução geral:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + c_0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = cx^2,$$

em que c é uma constante. Daí, concluímos que:

(b) se $a = 0$ e $b \neq 0$, não existe uma função $y(x) = cx^2$ que satisfaz a condição inicial, ou seja, o PVI não tem solução.

(c) se $a = 0$ e $b = 0$, a condição inicial não determina a constante c e, portanto, o PVI possui infinitas soluções.

Vale enfatizar que no caso (a) o PVI admite uma única solução num invervalo que contém $a \neq 0$. Porém, esse intervalo não contém o ponto 0.

Com efeito, se $a = 1$ e $b = 1$, então para qualquer valor da constante c, a função dada por

$$y(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ cx^2, & x < 0, \end{cases}$$

é solução do PVI. Note que a solução do PVI **não é única** se considerarmos $y(x)$ para qualquer $x \in (-\infty, \infty)$.

A unicidade é garantida quando consideramos x em um intervalo $I \subset (0, \infty)$. Neste caso, a única solução do PVI é

$$y(x) = x^2.$$

Equações de 2^a Ordem Redutíveis

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, na forma mais geral, pode ser escrita como

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

em que F é uma função de x, y, y' e y'', com $y \equiv y(x)$.

Uma EDO de 2^a ordem pode ser reduzida à uma EDO de 1^a ordem se ou x (variável independente) ou y (variável dependente) não aparece na equação.

Equações sem a variável dependente y

Considere a EDO de 2^a ordem $F(x, y', y'') = 0$. Fazendo a mudança de variável

$$v = y'$$

em que $v \equiv v(x)$, função só de x e não de y, tem-se $v' = y''$ e a EDO $F(x, y', y'') = 0$ pode ser escrita como

$$F(x, v, v') = 0, \tag{5}$$

que é uma EDO de 1^a ordem.

Se $v \equiv v(x; c_1)$ é a solução geral de (5), que depende de x e uma constante c_1, então a solução da EDO de 2^a ordem é

$$y(x) = \int v(x; c_1) dx + c_2 \quad (c_2 \text{ constante}).$$

Exemplo 9

Resolva a EDO

$$xy'' + 2y' = 6x.$$

Exemplo 9

Resolva a EDO
$$xy'' + 2y' = 6x.$$

Resolução: Fazendo a mudança de variável
$$v = y' \quad \text{e} \quad v' = y'' \quad (v \equiv v(x)),$$
e dividindo a equação por x, obtemos a EDO linear de 1^a ordem:
$$v' + \frac{2}{x}v = 6. \quad (*)$$
O fator integrante é
$$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{2}{x}\,dx\right\} = e^{2\ln|x|} = x^2.$$
Multiplicando a eq.$(*)$ por $\mu(x)$ temos
$$x^2v' + 2xv = 6x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}(x^2v) = 6x^2.$$

Integrando esta última equação em relação a x, resulta

$$x^2 v = 2x^3 + c_1 \quad \Longrightarrow \quad v = 2x + c_1 x^{-2},$$

com c_1 constante. Como $v = y'$, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = \int \left(2x + c_1 x^{-2}\right) dx + c_2$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = x^2 - \frac{c_1}{x} + c_2 \,,$$

em que c_1, c_2 são constantes.

Equações sem a variável independente x

Considere a EDO de 2^a ordem $F(y, y', y'') = 0$. Fazendo a mudança de variável

$$v = y'$$

em que $v \equiv v(y)$ é função de y e $y \equiv y(x)$, pela regra da cadeia tem-se $y'' = v'y' = vv'$ e a EDO $F(y, y', y'') = 0$ pode ser escrita como

$$F(y, v, vv') = 0, \tag{6}$$

que é uma EDO de 1^a ordem (em y).

Se $v \equiv v(y; c_1)$ é a solução de (6), que depende de y e uma constante c_1, substituindo em $v = y'$ tem-se a equação separável $\dfrac{dy}{dx} = v(y; c_1)$. Portanto, a solução da EDO de 2^a ordem é dada implicitamente por

$$\int \frac{1}{v(y; c_1)} dy = x + c_2 \quad (c_2 \text{ constante}).$$

Exemplo 10

Resolva a EDO

$$yy'' = (y')^2.$$

Exemplo 10

Resolva a EDO
$$yy'' = (y')^2.$$

Resolução: Fazendo a mudança de variável

$$v = y' \quad \text{e} \quad y'' = vv' \quad (v \equiv v(y)),$$

tem-se

$$y\,vv' = v^2 \quad \Longrightarrow \quad y\frac{dv}{dy} = v,$$

que é uma equação separável. Separando as variáveis v e y, e integrando ambos os lados:

$$\int \frac{1}{v}dv = \int \frac{1}{y}dy \quad \Longrightarrow \quad \ln|v| = \ln|y| + c_0 \quad (c_0 \text{ constante}).$$

Aplicando a exponencial e usando $v = y' = \frac{dy}{dx}$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y,$$

com a constante $c_1 = \pm e^{c_0}$. Separando as variáveis e integrando, tem-se

$$\int \frac{1}{y} dy = \int c_1 dx$$

$$\implies \quad \ln|y| = c_1 x + c_2 \quad (c_2 \text{ constante}).$$

Aplicando a exponencial, concluímos que as soluções da EDO são

$$y(x) = Ae^{c_1 x},$$

com a constante $A = \pm e^{c_2}$ ou $A = 0$ para o caso da solução $y = 0$.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos e discutimos (em vários exemplos) o teorema de existência e unicidade da solução de um PVI (linear ou geral), envolvendo uma EDO de primeira ordem.

Apresentamos também dois tipos especiais de EDOs de segunda ordem que podem ser reduzidas à EDOs de primeira ordem, efetuando uma mudança de variável apropriada.

Na próxima aula estudaremos equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Muito grato pela atenção!