Cálculo III

Aula 3 – Equações Exatas e Fatores Integrantes.

Marcos Eduardo Valle e
Roberto de Almeida Prado
IMECC – Unicamp

UNICAMP

Equações Exatas

Nesta aula estudaremos uma classe de equações diferenciais conhecidas como **equações exatas**, para as quais existe um método de resolução bem definido.

Primeiramente, observe que uma EDO de primeira ordem

$$y' = f(x, y)$$

em que $y \equiv y(x)$ e $y' = \dfrac{dy}{dx}$, pode ser escrita na forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

onde dx e $dy = y'dx$ são as diferenciais de x e y, respectivamente.

Equações Exatas

Uma EDO de primeira ordem

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0, \tag{1}$$

em que $M, N : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, é uma **equação exata** se existe uma função $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, que tem derivadas parciais contínuas em Ω, tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{2}$$

Neste caso, sendo $y \equiv y(x)$, por (1), (2) e pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{d}{dx}\left[\psi\big(x, y(x)\big)\right] = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

e, portanto, a **solução de uma EDO exata** do tipo (1) é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = c \quad (c \text{ é uma constante}). \tag{3}$$

Pode-se mostrar que existe uma função $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (2) em uma região Ω aberta e simplesmente conexa[a] se, e somente se, as funções M e N e suas derivadas parciais $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ e $\frac{\partial N}{\partial y}$ são todas contínuas em Ω, satisfazendo

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{4}$$

[a]Simplificadamente, uma região simplesmente conexa não possui furos. Um retângulo é um exemplo de uma região simplesmente conexa.

O resultado acima serve como um critério para determinar se a equação dada é exata ou não. Em outras palavras, uma EDO do tipo

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

é exata se, e somente se, M e N são contínuas e possuem derivadas parciais contínuas que satisfazem (4) em uma região aberta e simplesmente conexa de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1

Resolva a EDO
$$2x + y^2 + 2xyy' = 0.$$

Exemplo 1

Resolva a EDO
$$2x + y^2 + 2xyy' = 0.$$

Resolução: As funções $M(x,y) = 2x + y^2$ e $N(x,y) = 2xy$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ com derivadas parciais contínuas, satisfazendo
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, a EDO acima é exata. Então existe uma função $\psi(x,y)$ tal que
$$\text{(i) } \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \qquad \text{e} \qquad \text{(ii) } \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Integrando (i) em relação a x, obtemos
$$\psi(x,y) = \int (2x + y^2)dx + g(y) = x^2 + y^2x + g(y),$$

onde $g(y)$ é uma função arbitrária de y.

Derivando $\psi(x, y)$ em relação a y e usando (ii) temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = 2yx + g'(y) = 2xy$$

$$\implies \quad g'(y) = 0 \quad \implies \quad g(y) = c_1 \text{ (constante)}$$

Portanto,

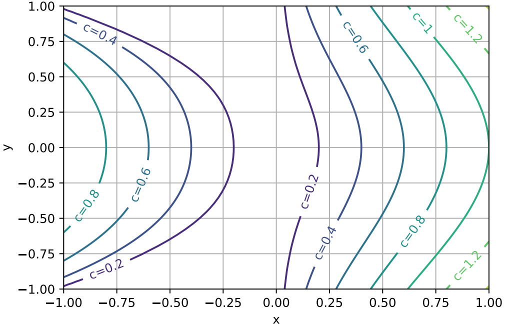
$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 x + c_1$$

e a solução geral da EDO é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 x = c,$$

em que c é uma constante.

A figura abaixo mostra o gráfico das soluções $x^2 + y^2 x = c$, para valores de c escolhidos.



Exemplo 2

Resolva o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y\cos x + 2xe^y + (\operatorname{sen} x + x^2 e^y - 3)y' = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Exemplo 2

Resolva o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y\cos x + 2xe^y + (\operatorname{sen} x + x^2 e^y - 3)y' = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Resolução: $M(x,y) = y\cos x + 2xe^y$ e $N(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 3$. As funções M, N e suas derivadas parciais são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e satisfazem

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \cos x + 2xe^y = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto, a equação é exata e existe uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\text{(i)} \ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = y\cos x + 2xe^y \quad \text{e} \quad \text{(ii)} \ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 3.$$

Integrando (i) em relação a x, obtemos

$$\psi(x,y) = \int (y\cos x + 2xe^y)dx + g(y) = y \operatorname{sen} x + x^2e^y + g(y),$$

onde $g(y)$ é uma função arbitrária de y. Derivando $\psi(x,y)$ em relação a y e usando (ii) temos

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 3$$

$$\Longrightarrow \quad g'(y) = -3 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -3y.$$

Assim, a solução geral da equação é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y - 3y = c \quad (c \text{ constante}).$$

Agora, usando a condição inicial:

$$y(0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2\operatorname{sen} 0 + 0^2e^2 - 3\cdot 2 = c \quad \Longrightarrow \quad c = -6.$$

Portanto, a solução do PVI é

$$\psi(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y - 3y = -6.$$

Exemplo 3

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Exemplo 3

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Resolução: As funções $M(x, y) = 3xy + y^2$, $N(x, y) = x^2 + xy$ e suas derivadas parciais são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 2x + y.$$

Note que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = -x$$

e o conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\right\}$ não é uma região aberta de $\mathbb{R}^2$.

Portanto, $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x, y) \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ (em qualquer região aberta e simplesmente conexa) e isto implica que a equação não é exata.

Fatores Integrantes

Algumas vezes é possível converter uma EDO que não é exata em uma EDO exata, multiplicando-a por um **fator integrante** $\mu(x, y)$ apropriado.

Especificamente, multiplicando a equação (suposta não exata)

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{5}$$

por $\mu \equiv \mu(x, y) \neq 0$, tem-se

$$\mu M + \mu N y' = 0. \tag{6}$$

Queremos encontrar μ de modo que a eq.(6) seja exata, o que ocorre se, e somente se,

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Equivalentemente,

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0, \tag{7}$$

em que μ_y denota a derivada parcial de μ com relação a y (análogo para μ_x, M_y e N_x).

A princípio, qualquer solução μ de (7) torna a eq.(6) exata e, neste caso, a solução poderá ser obtida pelo método de resolução usado nos Exemplos 1 e 2. A solução encontrada da eq.(6) também satisfaz a eq.(5), já que podemos dividir (6) por μ.

A eq.(7) pode ter mais de uma solução. Para simplificar o problema, geralmente assumimos que o fator integrante μ depende somente de x ou somente de y.

Quando $\mu \equiv \mu(x)$, segue de (7) que ($N \neq 0$)

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = \exp\left\{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right\}, \tag{8}$$

se o quociente $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ depende somente de x.

Analogamente, quando $\mu \equiv \mu(y)$, obtém-se de (7) que (para $M \neq 0$)

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu(y) = exp\left\{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right\}, \tag{9}$$

se o quociente $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ depende somente de y.

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Resolução: Mostramos no Exemplo 3 que essa equação não é exata. Vamos verificar se ela tem um fator integrante que depende só de x ou só de y. Temos $M(x,y) = 3xy + y^2$, $N(x,y) = x^2 + xy$ e

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Logo, considerando $x > 0$ (análogo para $x < 0$), existe o fator integrante

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{1}{x} dx\right\} = e^{\ln x} = x.$$

Multiplicando a equação dada por $\mu(x) = x$, obtemos

$$3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0. \quad (*)$$

A equação $(*)$ é exata, pois

$$M_y(x,y) = 3x^2 + 2xy = N_x(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então, existe uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\text{(i)}\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{e} \quad \text{(ii)}\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = x^3 + x^2y.$$

Integrando (ii) com relação a y, obtemos

$$\psi(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(x).$$

Derivando $\psi(x,y)$ com relação a x e usando (i), encontramos

$$3x^2y + xy^2 + h'(x) = 3x^2y + xy^2$$

$$\implies \quad h'(x) = 0 \quad \implies \quad h(x) = c_1 \text{ (constante)}.$$

Assim, as soluções da eq.$(*)$ e, portanto, da EDO são dadas por

$$\psi(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c, \quad \forall x \neq 0,$$

em que c é uma constante arbitrária.

Exemplo 5

Resolva a EDO

$$y^2 \cos x \, dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x) dy = 0.$$

Exemplo 5

Resolva a EDO

$$y^2 \cos x \, dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x) dy = 0.$$

Resolução: Note que $y = 0$ é solução da equação. Procuremos soluções $y \neq 0$. Aqui $M(x,y) = y^2 \cos x$ e $N(x,y) = 4 + 5y \operatorname{sen} x$. Temos

$$M_y(x,y) = 2y \cos x \quad \text{e} \quad N_x(x,y) = 5y \cos x.$$

Como $M_y \neq N_x$, a EDO não é exata. Procuramos então um fator integrante μ que depende só de x ou só de y. Temos que

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{5y \cos x - 2y \cos x}{y^2 \cos x} = \frac{3}{y}, \quad y \neq 0.$$

Considerando $y > 0$ (análogo para $y < 0$), existe o fator integrante

$$\mu(y) = \exp\left\{\int \frac{3}{y} dy\right\} = e^{3 \ln y} = y^3.$$

Multiplicando a equação dada por $\mu(y)$, obtemos

$$y^5 \cos x \, dx + (4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x) dy = 0. \quad (*)$$

A equação $(*)$ é exata, pois

$$M_y(x,y) = 5y^4 \cos x = N_x(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então, existe uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\text{(i) } \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = y^5 \cos x \quad \text{e} \quad \text{(ii) } \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x.$$

Integrando (i) com relação a x, obtemos

$$\psi(x,y) = y^5 \operatorname{sen} x + h(y).$$

Derivando $\psi(x,y)$ com relação a y e usando (ii), encontramos

$$5y^4 \operatorname{sen} x + h'(y) = 4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x$$

$$\Longrightarrow \quad h'(y) = 4y^3 \quad \Longrightarrow \quad h(y) = y^4.$$

Assim, as soluções da eq.$(*)$ e, portanto, da EDO são dadas por

$$\psi(x,y) = y^5 \operatorname{sen} x + y^4 = c \quad (c \text{ constante}).$$

Considerações Finais

Uma EDO do tipo $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ é **exata** se, e somente se, M e N são funções contínuas com derivadas parciais contínuas, tais que

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega,$$

em que Ω é uma região aberta e simplesmente conexa de $\mathbb{R}^2$.

Em alguns casos, podemos transformar uma EDO não exata em uma exata, usando um **fator integrante**, geralmente $\mu \equiv \mu(x)$ ou $\mu \equiv \mu(y)$.

A **solução** da EDO exata é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = c,$$

em que c é uma constante e ψ é tal que $\psi_x = M$ e $\psi_y = N$.

Muito grato pela atenção!