Cálculo III

Aula 2 – Equações Separáveis e Substituição de Variáveis.

Marcos Eduardo Valle e
Roberto de Almeida Prado
IMECC – Unicamp

Na aula anterior apresentamos o método dos fatores integrantes para resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares de primeira ordem do tipo

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t),$$

em que P, Q e G dependem apenas da variável t e $P(t) \neq 0$.

Na aula de hoje apresentaremos uma técnica para resolução de uma classe de EDOs de primeira ordem, chamadas **equações separáveis**, que podem ser escritas da seguinte forma:

$$g(y)\frac{dy}{dt} = f(t),$$

em que $y \equiv y(t)$, g depende somente de y e f depende somente de t.

Iniciaremos apresentando um exemplo.

Exemplo 1

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1 + y^2} \, ,$$

em que $y = y(t)$ é uma função de t.

Exemplo 1

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1+y^2},$$

em que $y = y(t)$ é uma função de t.

Resolução: A EDO pode ser escrita como

$$(1+y^2)\frac{dy}{dt} = t^2.$$

Integrando ambos os lados da equação com respeito a t e usando $dy = \frac{dy}{dt}dt$, temos

$$\int (1+y^2)dy = \int t^2 dt \quad \Longrightarrow \quad y + \frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + c,$$

com c constante. A solução y é dada implicitamente por esta relação.

Equações Separáveis

Uma EDO de primeira ordem **separável** pode ser escrita como

$$g(y)\frac{dy}{dt} = f(t), \tag{1}$$

em que $y \equiv y(t)$, $g(y) \neq 0$, g depende somente de y e f depende somente de t.

Suponha que as funções $g(y)$ e $f(t)$ são contínuas. A **solução geral de uma equação separável** na forma (1) é dada implicitamente pela relação

$$G(y) - F(t) = c, \tag{2}$$

em que c é constante, F e G são primitivas de f e g, respectivamente. Equivalentemente, podemos escrever (2) na forma

$$\int g(y)dy = \int f(t)dt + c.$$

Mostremos que a solução da equação (1) é dada por (2). Com efeito, como $y \equiv y(t)$, pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{dG(y)}{dt} = \frac{dG(y)}{dy}\frac{dy}{dt} = g(y)\frac{dy}{dt} \ .$$

Dessa forma, a equação diferencial (1) satisfaz

$$\frac{dG(y)}{dt} - f(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}[G(y) - F(t)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2).$$

Observemos que a equação separável (1) pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} = f(t)h(y) \ , \tag{3}$$

onde $h(y) = 1/g(y)$. Se em (3) ocorrer $h(c) = 0$ para algum $c \in \mathbb{R}$, tem-se que $y \equiv c$ é uma **solução estacionária** da equação (3).

Exemplo 2

Determine as soluções estacionárias e a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y-3}{t^2}.$$

Exemplo 2

Determine as soluções estacionárias e a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y-3}{t^2}.$$

Resolução: Primeiramente note que a EDO é separável da forma (3) com $f(t) = t^{-2}$ e $h(y) = y - 3$. O único zero da função h é $c = 3$. Assim, $y = 3$ é a única solução estacionária da equação.
Vamos determinar agora a solução geral da EDO. Supondo $y \neq 3$, escrevemos a equação na forma

$$\frac{1}{y-3}dy = \frac{1}{t^2}dt.$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$\int \frac{1}{y-3}dy = \int \frac{1}{t^2}dt$$
$$\implies \quad \ln|y-3| = -\frac{1}{t} + c_0,$$

onde c_0 é uma constante. Aplicando a exponencial em ambos os membros, implica que

$$y - 3 = \pm e^{c_0} e^{-1/t}.$$

Portanto, a solução geral da EDO é dada por

$$y = 3 + ce^{-1/t},$$

em que c é uma constante arbitrária. Note que para $c = 0$ obtemos a solução estacionária $y = 3$.

Exemplo 3

Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1, \tag{4}$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

Exemplo 3

Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1, \tag{4}$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

Resolução: A EDO em (4) é separável e podemos escrever

$$2(y-1)dy = (3t^2 + 4t + 2)dt.$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$\int 2(y-1)dy = \int (3t^2 + 4t + 2)dt$$

$$\Longrightarrow \quad y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t + c \quad (c \text{ constante}).$$

Usando a condição inicial $y(0) = -1$, temos

$$(-1)^2 - 2(-1) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c \implies c = 3 \,.$$

Logo, a solução $y = y(t)$ do PVI (4) é dada implicitamente por

$$y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t + 3.$$

Resolvendo a equação do segundo grau em y, juntamente com a c.i. $y(0) = -1$, a solução explícita do PVI é

$$y = 1 - \sqrt{t^3 + 2t^2 + 2t + 4} \,.$$

Esta função está definida em $\mathbb{R}$ se

$$t^3 + 2t^2 + 2t + 4 = (t+2)(t^2+2) \geq 0 \iff t \geq -2 \,,$$

ou seja, a solução y do PVI existe no intervalo $[-2, +\infty)$.

Substituição de Variáveis

Muitas vezes, uma EDO complicada pode ser reduzida a uma equação equivalente (tem a mesma solução da equação dada) mais simples, fazendo uma mudança de variável apropriada.

Infelizmente, não há regras ou métodos que levam à uma substituição de variáveis bem sucedida.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2, \tag{5}$$

em que $y = y(x)$ é uma função de x.

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2, \qquad (5)$$

em que $y = y(x)$ é uma função de x.

Resolução: Efetuamos a mudança de variável:

$$v = x + y + 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} .$$

Substituindo na eq.(5) obtemos a seguinte EDO separável (na nova variável v):

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + 1.$$

Resolvendo por separação de variáveis temos:

$$\int \frac{dv}{v^2+1} = \int dx \quad \Longrightarrow \quad \text{arctg}\, v = x + c$$
$$\Longrightarrow \quad v = \text{tg}\,(x+c)\,,$$

onde c é uma constante. Retornando à variável y, a solução geral da EDO (5) é dada por

$$y = v - x - 3$$
$$\Longrightarrow \quad y = \text{tg}\,(x+c) - x - 3\,,$$

com c constante.

Substituição $v = ax + by + c$

De um modo geral, generalizando o Exemplo 4, uma EDO na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

em que a, b, c são constantes com $b \neq 0$, pode ser transformada na EDO separável

$$\frac{dv}{dx} = bf(v) + a,$$

após a substituição

$$v = ax + by + c.$$

No Exemplo 4, $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$ e $f(v) = v^2$.

Substituição $v = y/x$

Uma EDO do tipo
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0, \tag{6}$$
em que $y \equiv y(x)$, pode ser resolvida aplicando a substituição $v = \dfrac{y}{x}$.

Isto implica $y = xv$ e $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$. Substituindo em (6), resulta na equação separável
$$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v. \tag{7}$$

Resolvendo (7) e usando $v = y/x$, obtém-se a solução de (6).

> A equação em (6) é chamada **homogênea de primeira ordem**. O termo "homogêneo" tem também outros significados nesse curso!

Exemplo 5

Resolva a EDO

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x} \quad (x \neq 0). \tag{8}$$

Exemplo 5

Resolva a EDO

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x} \quad (x \neq 0). \tag{8}$$

Resolução: Dividindo a eq.(8) por x obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}.$$

Usando a substituição:

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad y = vx \ ,$$

resulta na equação separável

$$x\frac{dv}{dx} + v = v + e^v \iff e^{-v}dv = \frac{1}{x}dx.$$

Integrando ambos os lados e resolvendo, temos

$$\begin{aligned} \int e^{-v}dv &= \int \frac{1}{x}dx \\ \Longrightarrow \quad -e^{-v} &= \ln|x| + c \\ \Longrightarrow \quad -v &= \ln(-\ln|x| - c), \end{aligned}$$

em que c é uma constante. Usando $v = y/x$, as soluções da EDO (8) são dadas por

$$y = -x\ln(-\ln|x| - c).$$

Equação de Bernoulli

Uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^{\alpha}, \tag{9}$$

em que α é uma constante real, é chamada **equação de Bernoulli**.

Para obter a solução de (9) supõe-se as funções $p(t)$ e $q(t)$ contínuas. Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação (9) é linear. No caso em que $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, efetuamos a substituição (para $y \neq 0$)

$$v = y^{1-\alpha}.$$

Temos que $\frac{dv}{dt} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dt}$. Multiplicando (9) por $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ obtemos a equação linear

$$\frac{dv}{dt} + (1-\alpha)p(t)v = (1-\alpha)q(t),$$

a qual pode ser resolvida usando fator integrante.

Exemplo 6

Resolva a equação de Bernoulli

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}, \tag{10}$$

em que $y = y(x)$ é uma função de x.

Exemplo 6

Resolva a equação de Bernoulli

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}, \tag{10}$$

em que $y = y(x)$ é uma função de x.

Resolução: Note que $y = 0$ é uma solução de (10). Para $y \neq 0$, efetuamos a mudança de variável:

$$v = y^{1-4/3} = y^{-1/3} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3}y^{-4/3}\frac{dy}{dx}\,.$$

Multiplicando a equação (10) por $-\frac{1}{3x}y^{-4/3}$, encontramos a EDO linear

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -1.$$

Resolvendo esta equação, o fator integrante é

$$\mu(x) = \exp\left\{\int -\frac{2}{x}\,dx\right\} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2}.$$

Multiplicando ambos os lados da EDO linear por $\mu(x)$ obtemos

$$x^{-2}\frac{dv}{dx} - 2x^{-3}v = -x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^{-2}v\right) = -x^{-2}.$$

Integrando com relação a x resulta

$$x^{-2}v = x^{-1} + c \quad \Longrightarrow \quad v = x + cx^2\,,$$

onde c é uma constante. Esta é a solução geral da EDO linear acima. Usando $v = y^{-1/3}$, a solução não nula da eq.(10) é dada por

$$y^{-1/3} = x + cx^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{(x+cx^2)^3}\,.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos duas técnicas (separação de variáveis e substituição de variáveis) para resolver algumas EDOs não lineares.

Primeiro, podemos integrar membro a membro uma EDO separável $g(y)\frac{dy}{dt} = f(t)$, em que $g(y)$ e $f(t)$ são funções contínuas. A solução geral é dada por $\int g(y)dy = \int f(t)dt + c$ (c constante).

Segundo, muitas vezes podemos transformar uma EDO complicada numa mais simples, efetuando uma substituição de variável apropriada. Por exemplo, a equação de Bernoulli pode ser transformada numa equação linear.

Muito grato pela atenção!