Cálculo III

Aula 1 – Introdução às Equações Diferenciais. Equações Lineares de Primeira Ordem. Método dos Fatores Integrantes.

Marcos Eduardo Valle e
Roberto de Almeida Prado
IMECC – Unicamp

Introdução às Equações Diferenciais

Muitos problemas importantes da Engenharia, da Física, da Química, da Biologia e de outras áreas são modelados por **equações diferenciais**, que são equações que envolvem derivadas de uma ou mais funções desconhecidas.

Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais

- Se as funções desconhecidas na equação dependem de uma única variável, temos uma **equação diferencial ordinária (EDO)**.
- Uma **equação diferencial parcial (EDP)** envolve derivadas parciais de uma ou mais funções que dependem de duas ou mais variáveis.

Exemplo 1

1. Um exemplo de EDO é a equação

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

para a corrente elétrica $i = i(t)$, no tempo t, em um circuito em série com indutância L, resistência R (L, R constantes) e voltagem $E(t)$ dada.

2. Um exemplo de EDP é a equação do calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

para a temperatura $u(x,t)$ de uma barra, num ponto x e no instante t, onde α é uma constante não nula.

Ordem de uma Equação Diferencial

A ordem de uma equação diferencial (ordinária ou parcial) é a ordem da maior derivada que aparece na equação.

Exemplo 2

1. A equação $\dfrac{d^3y}{dt^3} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$ é uma EDO de terceira ordem.
2. A equação do calor descrita no Exemplo 1 é uma EDP de segunda ordem.

EDOs Lineares

Uma EDO **linear** de ordem $n \geq 1$ é uma equação do tipo

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \tag{1}$$

onde as funções $a_n(t), \ldots, a_0(t), g(t)$ dependem somente de t, $a_n(t) \neq 0$ e $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dt^n}$ denota a n-ésima derivada de $y = y(t)$.

Uma EDO que não é da forma (1) é dita **não linear**.

Exemplo 3

1. A equação $t^2y'' - 3ty' + 5y = \cos t$ é uma EDO linear, pois é do tipo (1).
2. A equação $yy'' - 2y' = t$ é não linear devido ao termo yy''.

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Em termos gerais, nesta disciplina estudaremos os principais métodos para resolver e analisar diversas classes de equações diferenciais.

Vamos começar estudando as **Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem**.

Uma EDO de primeira ordem pode ser escrita, no caso mais geral, como

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)\ , \tag{2}$$

em que $y = y(t)$ e f é uma função real de duas variáveis (t e y).

Qualquer função derivável $y = \phi(t)$ que satisfaz (2) para todo t num certo intervalo é uma solução da EDO.

EDOs Lineares de Primeira Ordem

Em particular, temos uma EDO linear de primeira ordem quando em (2) a função f é linear em y, isto é, $f(t,y) = a(t)y + b(t)$. No caso mais geral (1), tem-se

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \tag{3}$$

em que P, Q e G são funções somente de t e $P(t) \neq 0$.

Exemplo 4

Resolva a equação diferencial linear de primeira ordem

$$(4+t^2)\frac{dy}{dt} + 2ty = 4t.$$

Resolução: Usando a regra do produto, podemos re-escrever a equação como

$$\frac{d}{dt}[(4+t^2)y] = 4t.$$

Integrando ambos os lados dessa equação e usando o teorema fundamental do cálculo, encontramos

$$(4+t^2)y = 2t^2 + c,$$

em que c é uma constante de integração. Logo, a solução da EDO é

$$y = \frac{2t^2+c}{4+t^2}.$$

A função $y(t)$ acima, que estabelece uma família de soluções que dependem da constante c, é referida como solução geral da EDO.

Exemplo 5

Encontre a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Determine também a solução que satisfaz $y = 1$ quando $t = 0$, chamada **condição inicial**.

Exemplo 5

Encontre a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Determine também a solução que satisfaz $y = 1$ quando $t = 0$, chamada **condição inicial**.

Resolução: Primeiramente, multiplicando ambos os lados da EDO por uma função $\mu(t) \neq 0$, chamada **fator integrante**, encontramos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}.$$

A função $\mu(t)$, a ser determinada, é escolhida de modo que o lado esquerdo da equação satisfaça

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y\ ,$$

o que ocorre se

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t).$$

Resolvendo esta equação, temos

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\ln|\mu(t)| = \frac{1}{2}\,.$$

Integrando com relação a t e aplicando a exponencial, obtém-se

$$\mu(t) = c_0 e^{t/2}$$

onde c_0 é uma constante. Como precisamos de apenas uma função $\mu(t)$, tomamos $c_0 = 1$.

Retornando à equação dada e multiplicando-a por $\mu(t) = e^{t/2}$, temos

$$e^{t/2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{t/2}y = \frac{1}{2}e^{t/2}e^{t/3} \iff \frac{d[e^{t/2}y]}{dt} = \frac{1}{2}e^{5t/6}.$$

Integrando com relação a t, encontramos

$$e^{t/2}y = \frac{3}{5}e^{5t/6} + c \implies y = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2},$$

em que c é uma constante. Esta é a solução geral da EDO dada.

Impondo $y = 1$ para $t = 0$, temos $1 = 3/5 + c \implies c = 2/5$. Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + \frac{2}{5}e^{-t/2}.$$

Método dos Fatores Integrantes

Primeiramente, podemos escrever uma EDO linear de primeira ordem na forma (dividindo a eq.(3) por $P(t) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{4}$$

em que p e g são funções somente de t. Suponhamos $p(t)$ e $g(t)$ contínuas num intervalo e vamos obter a solução geral de (4).

No método dos fatores integrantes, procuramos uma função $\mu(t) \neq 0$ (**fator integrante**) tal que

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y.$$

Para isto devemos ter

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)p(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t).$$

Admitindo $\mu(t) > 0$, pela regra da cadeia concluímos que

$$\frac{d[\ln \mu(t)]}{dt} = p(t).$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\ln \mu(t) = \int p(t)dt \quad \Longrightarrow \quad \mu(t) = \exp\left\{\int p(t)dt\right\}.$$

Multiplicando ambos os lados de (4) por $\mu(t)$, concluímos que

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)g(t).$$

Integrando em relação a t e depois dividindo por $\mu(t)$, segue que a solução geral da EDO (4) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)g(t)dt + c\right] \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right],$$

em que c é constante e t_0 é um limite inferior de integração apropriado.

Exemplo 6

Resolva o problema de valor inicial (PVI), usando o método dos fatores integrantes.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2. \tag{5}$$

Exemplo 6

Resolva o problema de valor inicial (PVI), usando o método dos fatores integrantes.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2. \tag{5}$$

Resolução: A EDO em (5) é linear de primeira ordem. Dividindo a equação por $t \neq 0$, temos

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = exp\left\{\int \frac{2}{t}dt\right\} = e^{2\ln|t|} = t^2.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $\mu(t)$ obtemos

$$t^2y' + 2ty = 4t^3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(t^2y\right) = 4t^3.$$

Integrando com relação a t, obtemos

$$\begin{aligned} & t^2y = \int 4t^3 dt + c \\ \Longrightarrow \quad & t^2y = t^4 + c \\ \Longrightarrow \quad & y = t^2 + \frac{c}{t^2}, \quad t \neq 0, \end{aligned}$$

onde c é uma constante. Esta função $y(t)$ é a solução geral da EDO em (5).

Agora, usando a condição inicial temos

$$y(1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2 = 1^2 + \frac{c}{1^2} \quad \Longrightarrow \quad c = 1.$$

Portanto, a solução do PVI (5) é

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0.$$

Note que a solução é válida somente para $t > 0$. De fato, a solução y não intercepta o eixo vertical ($t = 0$) e deve satisfazer a condição inicial $y(1) = 2$, que está no primeiro quadrante.

Exemplo 7

Resolva o problema de valor inicial (PVI), usando o método dos fatores integrantes.

$$2y' + ty = 2, \quad y(0) = 1.$$

Exemplo 7

Resolva o problema de valor inicial (PVI), usando o método dos fatores integrantes.

$$2y' + ty = 2, \quad y(0) = 1.$$

Resolução: Primeiro, escrevemos a EDO linear como

$$y' + \frac{t}{2}y = 1.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = exp\left\{\int \frac{t}{2}dt\right\} = e^{t^2/4}.$$

Multiplicando a equação acima por $\mu(t)$ obtemos

$$e^{t^2/4}y' + \frac{t}{2}e^{t^2/4}y = e^{t^2/4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{t^2/4}y\right) = e^{t^2/4}.$$

Integrando com relação a t, encontramos a solução geral da EDO:

$$y = \frac{1}{e^{t^2/4}} \left[\int e^{t^2/4} dt + c \right]$$

com c uma constante, ou usando o ponto $t_0 = 0$ da condição inicial,

$$y = e^{-t^2/4} \left[\int_0^t e^{s^2/4} ds + c \right].$$

Usando a condição inicial: $y(0) = 1 \implies 1 = e^0 \left[0 + c \right] \implies c = 1$. Portanto, a solução do PVI é

$$y = e^{-t^2/4} \int_0^t e^{s^2/4} ds + e^{-t^2/4}.$$

Note que a solução é expressa na forma de uma integral definida que pode ser avaliada usando um método numérico.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos definições de EDO, EDP, ordem e linearidade de equações diferenciais. Apresentamos também o método dos fatores integrantes para resolução de EDOs lineares de primeira ordem da forma

$$y' + p(t)y = g(t),$$

em que $p(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas. O fator integrante é

$$\mu(t) = \exp\left\{\int p(t)dt\right\}$$

e a solução geral da EDO é dada por

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)g(t)dt + c\right] \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right],$$

em que c é uma constante e t_0 é um limite de integração apropriado.

Muito grato pela atenção!