Cálculo II (Cursão)

Aula 26 – Teorema do Divergente.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

O **teorema do divergente**, também chamado **teorema de Gauss**, estabelece uma identidade entre a integral de superfície de um campo vetorial **F** com a integral tripla do divergente de **F**.

Definição 1 (Região Sólida Simples)

Uma região $E \subseteq \mathbb{R}^3$ é chamada **região sólida simples** se E pode ser escrita simultaneamente como:

$$E = \{(x,y,z) : f_1(x,y) \leq z \leq g_1(x,y), (x,y) \in D_1\}, \qquad \textbf{(tipo 1)},$$
$$E = \{(x,y,z) : f_2(y,z) \leq x \leq g_2(y,z), (y,z) \in D_2\}, \qquad \textbf{(tipo 2)},$$
$$E = \{(x,y,z) : f_3(x,z) \leq y \leq g_3(x,z), (x,z) \in D_3\}, \qquad \textbf{(tipo 3)}.$$

A fronteira de E é uma superfície fechada e usaremos a convenção de que a orientação positiva é para fora.

Teorema do Divergente

Teorema 2 (Teorema do Divergente)

Sejam E uma região sólida simples e S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Se **F** *é um campo vetorial de classe* C^1 *em E, então*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E div\, \mathbf{F} dV.$$

Demostração: Seja

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

um campo vetorial de classe C^1 em V. Por um lado, temos

$$\iint_E \text{div}\, \mathbf{F} dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV.$$

Por outro lado, se $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário para fora de S, então

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_S (P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k})\cdot \mathbf{n}dS \\ &= \iint_S P\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_S Q\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS.\end{aligned}$$

Mostraremos apenas que

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}dV = \iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}dS.$$

Porém, de um modo análogo tem-se

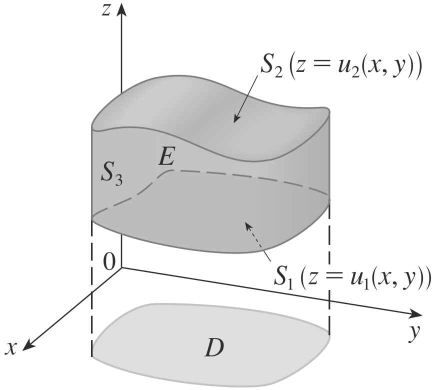
$$\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}dV = \iint_S P\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}dS \quad \text{e} \quad \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}dV = \iint_S Q\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dS.$$

Sobretudo, encontramos a identidade estabelecida pelo teorema do divergente somando as três equações.

Primeiramente, como E é uma região sólida simples, temos

$$E = \{(x,y,z) : f_1(x,y) \leq z \leq g_1(x,y), (x,y) \in D_1\}.$$

Observe que superfície fronteira S é formada por três partes: o fundo S_1, o topo S_2 e possivelmente a lateral S_3.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Sobre S_3, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ pois $\mathbf{k}$ é vertical e $\mathbf{n}$ é horizontal. Assim,

$$\iint_{S_3} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

A superfície S_2 (topo) é dada por $z = g_1(x, y)$, $(x, y) \in D_1$.
Considerando a parametrização

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + g_1(x, y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in D_1,$$

encontramos

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g_1}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Note que $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ aponta para cima e, portanto, possui orientação positiva. Pela definição de integral de superfície, com $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)/\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|$, obtemos

$$\iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{D_1} R\big(x, y, g_1(x, y)\big) dA.$$

Analogamente, a superfície S_1 (fundo) é dada por $z = f_1(x, y)$, para $(x, y) \in D_1$. Considerando a parametrização $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f_1(x, y)\mathbf{k}$, encontramos

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial f_1}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

que tem a direção oposta do vetor normal $\mathbf{n}$ que aponta para fora da superfície. Logo, pela definição de integral de superfície com $\mathbf{n} = -(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)/\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|$, encontramos

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = -\iint_{D_1} R\big(x, y, f_1(x, y)\big) dA.$$

Concluindo, por um lado temos

$$\begin{aligned}\iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_3} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -\iint_{D_1} R\big(x, y, g_1(x, y)\big) dA + \iint_{D_1} R\big(x, y, f_1(x, y)\big) dA.\end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que E pode ser escrito como um sólido do tipo 1 e usando pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_{D_1} \left(\int_{f_1(x,y)}^{g_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dA$$
$$= \iint_{D_1} R\big(x, y, g_1(x, y)\big) dA - \iint_{D_1} R\big(x, y, f_1(x, y)\big) dA.$$

Comparando os dois últimos resultados, concluímos que

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS.$$

De um modo similar, pode-se mostrar que

$$\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{e} \quad \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Essas últimas equações concluem a demostração do teorema do divergente. $\square$

Escrevendo um campo vetorial **F** em termos de suas componentes

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

podemos escrever a integral de superfície como:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \iint_S \Big(P(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) + Q(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) + R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \Big) dS \\
&= \iint_S \Big(P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma \Big) dS,
\end{aligned}$$

em que $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ correspondem as projeções de **n** nos eixos x, y e z, respectivamente.

Como **n** é um vetor unitário, temos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Exemplo 3

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exemplo 3

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resposta: Pelo teorema do divergente, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_E 1 dV = \frac{3}{4}\pi.$$

Exemplo 4

Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + \text{sen}(xy)\mathbf{k},$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

Exemplo 4

Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ em que

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy)\mathbf{k},$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

Resposta: Pelo teorema do divergente, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y\,dy\,dz\,dx = \frac{184}{35}.$$

Regiões Sólidas Mais Gerais

Embora enunciamos o teorema do divergente para regiões sólidas simples, ele pode ser estendido para uma região sólida E mais geral se pudermos escrever E como a união de regiões sólidas simples!

Por exemplo, suponha que E é uma região solida entre duas superfícies S_1 e S_2, onde S_1 está dentro de S_2. Sejam $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ os vetores normais unitários apontando para fora de S_1 e S_2, respectivamente. A superfície fronteira de S é $S = S_1 \cup S_2$ e o vetor normal é $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ sobre S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ sobre S_2. Pelo teorema do divergente, temos

$$\begin{aligned}\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS \\ &= \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n}_1) dS.\end{aligned}$$

Exemplo 5

Determine o fluxo elétrico $\mathbf{E}$, dado por $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\epsilon Q}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$, sobre uma superfície fechada S que contém a origem.

Dica: Pode-se verificar que div $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ para qualquer $\mathbf{x}$.

Exemplo 5

Determine o fluxo elétrico $\mathbf{E}$, dado por $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\epsilon Q}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$, sobre uma superfície fechada S que contém a origem.
Dica: Pode-se verificar que div $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ para qualquer $\mathbf{x}$.

Resposta: Considere uma esfera S_a, com centro na origem e raio a suficientemente pequeno tal que S_a está dentro de S. Assim,

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n}_a) dS.$$

Porém, div $\mathbf{E} = 0$ e $\iint_{S_a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_a dS = 4\pi\epsilon Q$. Portanto,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi\epsilon Q,$$

para qualquer superfície fechada S que contém a origem.

Interpretação do Divergente

O seguinte teorema apresenta uma formulação alternativa para o divergente de um campo vetorial **F**.

Teorema 6

Seja $E(t)$ uma região sólida simples contida na bola $\mathcal{B}(\mathbf{a}, t)$ de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ e raio $t > 0$. Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em $E(t)$, então

$$div\, \mathbf{F} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{V\big(E(t)\big)} \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

em que $S(t)$ denota a fronteira de $E(t)$ e $V\big(E(t)\big)$ seu volume.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, vamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\left| \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \frac{1}{V\big(E(t)\big)} \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \right| < \epsilon \quad \text{sempre que} \;\; 0 < t < \delta.$$

Com efeito, sendo $\mathbf{F}$ de classe C^1 em $E(t)$, suas derivadas parciais são contínuas nesse domínio. Logo, div $\mathbf{F}$ também é contínua em $E(t)$ e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\| < \epsilon. \tag{1}$$

Escrevendo

$$\text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \big(\text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\big),$$

e integrando ambos os lados da equação com respeito ao sólido $E(t)$, com $t < \delta$, obtemos

$$\iiint_{E(t)} \text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) dV = \iiint_{E(t)} \text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV + \iiint_{E(t)} \big(\text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{div}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\big) dV.$$

Aplicando o teorema do divergente na primeira integral do termo do lado direito, encontramos

$$\big(\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a})\big)V\big(E(t)\big) - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{E(t)} \big(\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})\big) dV.$$

Finalmente, usando a desigualdade (1), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left|\big(\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a})\big)V\big(E(t)\big) - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\right| \\
&= \left|\iiint_{E(t)} \big(\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})\big) dV\right| \\
&\leq \iiint_{E(t)} \left|\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})\right| dV \\
&< \epsilon \iiint_{E(t)} dV = \epsilon V\big(E(t)\big).
\end{aligned}$$

Dividindo os termos por $V\big(E(t)\big)$, encontramos a desigualdade desejada. □

Interpretação do Divergente

Considere $\mathbf{v}$ um campo de velocidades de um fluido com densidade ρ.

A vazão do fluido por unidade de área é $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ e a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mede a massa total do fluído passando por S na direção de $\mathbf{n}$ por unidade de tempo. Sobretudo, o quociente

$$\frac{1}{V(E)} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

representa a massa por unidade de volume que passar por S na direção de $\mathbf{n}$ por unidade de tempo.

Pelo teorema anterior, o limite desse teorema é o divergente de $\mathbf{F}$ em $\mathbf{a}$.

Portanto, div $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ pode ser interpretado como a taxa de variação da massa por unidade de volume por unidade de tempo em $\mathbf{a}$.

Em outras palavras, div $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ é a vazão total por unidade de volume que sai de $\mathbf{a}$. Tem-se, em particular:

- Se div $\mathbf{F}(\mathbf{a}) > 0$, o escoamento total perto de $\mathbf{a}$ é para fora de $\mathbf{a}$. Nesse caso, $\mathbf{a}$ é chamado **fonte**.
- Se div $\mathbf{F}(\mathbf{a}) < 0$, o escoamento total perto de $\mathbf{a}$ é para dentro e $\mathbf{a}$ é chamado **sorvedouro**.

Considerações Finais

Na aula de hoje enunciamos e demostramos o teorema do divergente.

Embora esse importante resultado tenha sido enunciado para regiões sólidas simples, ele pode ser estendido para regiões mais gerais obtidas pela união de regiões sólidas simples.

Finalmente, usamos o teorema do divergente para obter uma interpretação física de div $\mathbf{F}(\mathbf{a})$.

Muito grato pela atenção!