Cálculo II (Cursão)

Aula 25 – Aplicações e Consequências do Teorema de Stokes.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, enunciamos o teorema de Stokes. Resumidamente, tem-se

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

em que S é uma superfície orientada suave e simples, C é a curva fronteira de S e $\mathbf{F}$ é um campo vetorial com derivadas parciais contínuas.

Na aula de hoje, exploraremos algumas aplicações e consequências do teorema de Stokes.

Iniciaremos apresentando uma interpretação do rotacional.

Interpretação do Rotacional

Suponha que C seja uma curva fechada orientada e considere um campo vetorial $\mathbf{F}$. Podemos escrever

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds, \tag{1}$$

em que ds denota um infinitesimal do comprimento de arco, ou seja, $ds = \|\alpha'(t)\| dt$, e $\mathbf{T}$ denota o vetor tangente unitário à curva C, ou seja,

$$\mathbf{T} = \alpha(t)'/\|\alpha(t)\|.$$

Lembre-se que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ é a componente de $\mathbf{F}$ na direção do vetor tangente unitário $\mathbf{T}$. E mais, quanto mais próxima a direção de $\mathbf{F}$ está da direção de $\mathbf{T}$, maior é o valor do produto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$.

Concluindo, a integral de linha em (1) mede a tendência de uma particular se mover em torno de C sob a ação do campo vetorial $\mathbf{F}$.

Teorema 1

Seja $S(t)$ um círculo de raio t e centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Denote o vetor normal ao disco e a curva fronteira de $S(t)$ respectivamente por $\mathbf{n}$ e $C(t)$. Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em $S(t)$, então

$$\mathbf{n} \cdot \mathit{rot}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\pi t^2} \oint_{C(t)} \mathbf{F} \cdot d\alpha.$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, vamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\left| \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \frac{1}{\pi t^2} \oint_{C(t)} \mathbf{F} \cdot d\alpha \right| < \epsilon, \quad \text{sempre que } \; 0 < t < \delta.$$

Com efeito, sendo $\mathbf{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$ em $S(t)$, suas derivadas parciais são contínuas nesse domínio. Logo, rot $\mathbf{F}$ também é contínua em $S(t)$ e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}, \delta) \quad \Longrightarrow \quad \|\mathrm{rot}\, \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathrm{rot}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\| < \epsilon. \tag{2}$$

Escrevendo

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \cdot \big(\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x})\big),$$

e integrando ambos os lados da equação com respeito ao disco $S(t)$ com $t < \delta$, obtemos

$$\iint_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) dS = \iint_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x}) dS + \iint_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \big(\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x})\big) dS.$$

Lembrando que $S(t)$ é um disco de raio t e usando o teorema de Stokes na primeira integral do termo do lado direito, temos

$$(\pi t^2)\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \oint_{C(t)} \mathbf{F} \cdot d\alpha = \iint_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \big(\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x})\big) dS.$$

Finalmente, usando a desigualdade (2) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos

$$\begin{aligned}
&\left|(\pi t^2)\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \oint_{C(t)} \mathbf{F} \cdot d\alpha\right| \\
&\quad = \left|\iint_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \Big(\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x})\Big) dS\right| \\
&\quad \leq \iint_{S(t)} \left|\mathbf{n} \cdot \Big(\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x})\Big)\right| dS \\
&\quad \leq \iint_{S(t)} \|\mathbf{n}\| \|\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x})\| dS \\
&\quad < \epsilon \iint_{S(t)} dS = \epsilon(\pi t^2).
\end{aligned}$$

Dividindo os termos por πt^2, encontramos a desigualdade desejada. □

Quando **F** é um campo de velocidades, a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$ é chamada *circulação* de **F** ao longo de C.

O quociente

$$\frac{1}{\pi t^2} \oint_{C(t)} \mathbf{F} \cdot d\alpha.$$

representa a circulação por unidade de área.

Portanto, $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{a})$ pode ser visto como a “densidade de circulação” de **F** em **a** com respeito ao plano perpendicular a **n** em **a**.

Em outra palavras, $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ mede o efeito da rotação em torno do eixo **n**. E mais, o efeito é maior em um eixo paralelo a $\operatorname{rot} \mathbf{F}$.

Aplicações do Teorema de Stokes

Por um lado, o teorema de Stokes pode ser usado para transformar uma integral de linha numa integral de superfície.

Por outro lado, se desejamos usar o teorema de Stokes para transformar uma integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ numa integral de linha sobre a curva fronteira de S, precisamos encontrar G tal que $\mathbf{F} = \text{rot}\, \mathbf{G}$.

Nesse contexto, lembre-se que vimos na Aula 23 o seguinte teorema:

Teorema 2

Seja $\mathbf{F}$ *um campo vetorial de classe* $\mathcal{C}^1$ *no interior de um paralelepípedo* $S \subseteq \mathbb{R}^3$. *Existe um campo vetorial* $\mathbf{G}$ *tal que* $\text{rot}\, \mathbf{G} = \mathbf{F}$ *se, e somente se,* $\text{div}\, \mathbf{F} = 0$ *em todo ponto* $(x, y, z) \in S$.

Vamos demostrar esse resultado. Antes, porém, vamos comentar um pouco mais sobre o campo vetorial $\mathbf{G}$ tal que $\text{rot}\, \mathbf{G} = \mathbf{F}$.

É importante destacar que, dado um campo vetorial **F**, não existe um único campo vetorial **G** de classe C^1 em um conjunto aberto e convexo $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$.

Com efeito, se rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ e $\nabla\varphi$ é um gradiente de classe C^1 em S de um campo escalar φ, então

$$\text{rot } (\mathbf{G} + \nabla\varphi) = \text{rot } \mathbf{G} + \text{rot } \nabla\varphi = \text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}.$$

Contudo, se existe um outro campo vetorial **H** de classe C^1 em S tal que rot $\mathbf{H} = \mathbf{F}$, então $\mathbf{H} = \mathbf{G} + \nabla\varphi$. De fato,

$$\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rot } (\mathbf{H} - \mathbf{H}) = \mathbf{0} \text{ em } S.$$

Pelo Teorema 10 da Aula 23, tem-se que existe φ tal que $\mathbf{H} - \mathbf{G} = \nabla\varphi$, ou ainda,

$$\mathbf{H} = \mathbf{G} + \nabla\varphi.$$

A equação acima fornece a forma mais geral de um campo vetorial tal que rot $\mathbf{H} = \mathbf{F}$.

Demostração do Teorema 2

Sabemos que se $\mathbf{F} = \text{rot } G$, então $\text{div } \mathbf{F} = 0$ em S. Vamos mostrar agora que se $\text{div } \mathbf{F} = 0$ então existe $\mathbf{G}$ tal que $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$.

Especificamente, suponha que

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}.$$

Vamos encontrar $\mathbf{G}$ da forma:

$$\mathbf{G}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{j} + N(x,y,z)\mathbf{k}.$$

Nesse caso, devemos ter

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P, \quad -\frac{\partial N}{\partial x} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = R. \tag{3}$$

Integrando as duas últimas equações em x, obtemos:

$$N(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} Q(t,y,z)dt + f(y,z),$$
$$M(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} R(t,y,z)dt + g(y,z),$$

em que x_0 é um ponto no interior do paralelepípedo S.

Por simplicidade, vamos buscar uma solução com $f(y,z) = 0$.

Da primeira equação em (3), tem-se

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= \frac{\partial N}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial M}{\partial z}(x,y,z) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} Q(t,y,z)dt - \frac{\partial}{\partial z}\int_{x_0}^{x} R(t,y,z)dt + \frac{\partial g}{\partial z}(y,z) \\ &= \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{\partial}{\partial y}Q(t,y,z)dt - \frac{\partial}{\partial z}R(t,y,z)\right)dt + \frac{\partial g}{\partial z}(y,z) \end{aligned}$$

Por hipótese, temos que

$$\text{div}\, \mathbf{F} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Logo, usando o 2^o teorema fundamental do cálculo, concluímos que

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} P(t,y,z)dt + \frac{\partial g}{\partial z}(y,z) \\ &= P(x,y,z) - P(x_0,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(y,z). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -P(x_0,y,z) \quad \Longrightarrow \quad g(y,z) = -\int_{z_0}^{z} P(x_0,y,u)du,$$

em que z_0 é um ponto no interior do paralelepípedo S.

Concluindo, dado um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k},$$

com div $\mathbf{F} = 0$ no interior de um paralelepípedo S, o campo vetorial

$$\mathbf{G}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{j} + N(x,y,z)\mathbf{k},$$

com

$$M(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} R(t,y,z)dt - \int_{z_0}^{z} P(x_0,y,u)du,$$
$$N(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} Q(t,y,z)dt,$$

é tal que rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$.

Exemplo 3

Encontre, se existir, um campo vetorial **G** tal que

$$\text{rot } \mathbf{G} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

em todo $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3

Encontre, se existir, um campo vetorial $\mathbf{G}$ tal que

$$\text{rot } \mathbf{G} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

em todo $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Temos que $\mathbf{G}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{j} + N(x, y, z)\mathbf{k}$, com

$$M(x, y, z) = \int_0^x (t - y)dt - \int_0^z (y - u)du = \frac{x^2}{2} - xy - yz + \frac{z^2}{2},$$

$$N(x, y, z) = -\int_0^x (z - t)dt = \frac{x^2}{2} - xz,$$

ou seja,

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{2} - xy - yz + \frac{z^2}{2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{2} - xz\right)\mathbf{k}.$$

É importante destacar que o Teorema 2 não vale para regiões arbitrárias.

Exemplo 4

Considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{e} \quad r = \|\mathbf{r}\|,$$

definido para todo (x, y, z) na região D delimitada por duas esferas de centro na origem e raios $0 < a < b$. Mostre que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ em D mas não existe $\mathbf{G}$ tal que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$ em D.

É importante destacar que o Teorema 2 não vale para regiões arbitrárias.

Exemplo 4

Considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{e} \quad r = \|\mathbf{r}\|,$$

definido para todo (x,y,z) na região D delimitada por duas esferas de centro na origem e raios $0 < a < b$. Mostre que div $\mathbf{F} = 0$ em D mas não existe $\mathbf{G}$ tal que rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ em D.

Resposta: Suponha que existe $\mathbf{G}$ tal que rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Pelo teorema de Stokes, temos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \text{rot } \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{G} \cdot d\alpha,$$

em que S denota uma calota de uma esfera de raio R, com $a < R < b$.

Por um lado,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R^3} \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{1}{R^2},$$

e, portanto, temos

$$I_1 = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{R^2} \iint_S dS = \frac{\text{área de } S}{R^2}.$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$I_2 = \left| \oint_C \mathbf{G} \cdot d\alpha \right| \leq \oint_C |\mathbf{G}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt \leq M(\text{comprimento de C}),$$

em que $M = \max_t \|\mathbf{G}(\alpha(t))\|$.

Agora, quando fazemos a calota tender para o polo norte (um ponto), concluímos que

$$I_1 \to 4\pi \quad \text{max} \quad I_2 \to 0.$$

Temos, portanto, uma contradição.

Considerações Finais

Na aula de hoje, usando o teorema de Stokes, apresentamos uma interpretação física para o rotacional.

Depois, focamos nas aplicações do teorema de Stokes. Em especial, demostramos o Teorema 2 que havia sido enunciado na Aula 23.

Destacamos que esse teorema não vale numa região arbitrária.

Finalmente, mostramos como obter um campo vetorial $\mathbf{G}$ tal que rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$.

Muito grato pela atenção!