Cálculo II (Cursão)

Aula 24 – Teorema de Stokes.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

O teorema de Stokes estabelece uma relação entre uma integral de superfície com uma integral em torno da curva dada pela fronteira da superfície de integração.

Por convenção, dizemos que a curva C dada pela fronteira de uma superfície S tem **orientação positiva** se a superfície estiver sempre a esquerda quando percorremos a curva com a cabeça na direção e sentido do vetor normal unitário $\mathbf{n}$.

Teorema de Stokes

Teorema 1 (Teorema de Stokes)

Seja S uma superfície orientada suave e simples descrita por $\mathbf{r} : T \to S$ em que T é uma região limitada por uma curva de Jordan suave por partes Γ. Suponha que $\mathbf{r}$ é uma transformação bijetora cujas componentes possuem derivadas de segunda ordem contínuas num conjunto aberto que contém $T \cup \Gamma$. Denote por C a imagem de Γ por $\mathbf{r}$, ou seja, $C = \mathbf{r}(\Gamma)$. Dado um campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ de classe C^1, tem-se

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \iint_S rot\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

em que Γ é percorrida no sentido positivo e C é percorrida na direção herdada por Γ através de $\mathbf{r}$ e descrita por α.

Em palavras, como

$$\oint_C \mathbf{F} d\alpha = \oint_C \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \quad \text{e} \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

o teorema de Stokes afirma que a integral de linha em torno da curva C fronteira de S é igual à integral de superfície da componente normal do rotacional de **F**.

A identidade no teorema de Stokes também pode ser escrito como

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Demostração do Teorema de Stokes

Vamos mostrar que

$$\oint_C Pdx = \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial dz} dz \wedge dx\right). \tag{1}$$

De modo análogo, tem-se

$$\oint_C Qdy = \iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial dx} dx \wedge dy\right),$$
$$\oint_C Rdz = \iint_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial dy} dy \wedge dz\right).$$

O teorema de Stokes é obtido somando as três equações.

Primeiro, considere a equação vetorial da superfície S:

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k}, \quad \forall (u,v) \in T.$$

Dessa forma, pela definição, a integral de superfície no termo do lado direito de (1) é

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial dz} dz \wedge dx \right) \\
&= \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} \right) dudv.
\end{aligned}
$$

Denotando

$$
p(u,v) = P(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)), \quad \forall (u,v) \in T,
$$

pode-se mostrar (exercício 13 seção 12.13 do Apostol) que

$$
I = \iint_T \frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) dudv.
$$

Usando o teorema de Green, obtemos

$$
I = \int_\Gamma p \frac{\partial X}{\partial u} du + p \frac{\partial X}{\partial v} dv,
$$

em que Γ é percorrida no sentido positivo.

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma parametrização de Γ. Tomando

$$\alpha(t) = \mathbf{r}\big(\gamma(t)\big), \quad \forall t \in [a, b],$$

obtemos uma parametrização de C.

Sobretudo, pela regra da cadeia, tem-se

$$I = \oint_C P dx,$$

que concluí a demostração do teorema de Stokes. $\square$

Exemplo 2

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

e C é a curva da intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (com orientação no sentido anti-horário quando vista por cima).

Exemplo 2

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

e C é a curva da intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (com orientação no sentido anti-horário quando vista por cima).

Resposta: Pelo teorema de Stokes, temos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_T \text{rot } \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\theta) dA = \pi,$$

em que T é o disco $0 \leq \rho \leq 1$ em coordenadas polares e

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = \rho \cos\theta\mathbf{i} + \rho \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + (2 - \rho \operatorname{sen}\theta)\mathbf{k}$$

descreve a superfície S.

Exemplo 3

Calcule a integral $\iint_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy.

Exemplo 3

Calcule a integral $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy.

Resposta: Pelo teorema de Stokes, temos

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_0^{2\pi} \Big(\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(\theta)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(\theta)\Big) d\theta = 0,$$

em que

$$\boldsymbol{\alpha}(\theta) = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Consequências sobre o Teorema de Stokes

Se S_1 e S_2 são duas superfícies orientadas com a mesma curva fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do teorema de Stokes, então

$$\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Esse fato é útil quando for difícil calcular a integral sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra!

Teorema de Green $\subseteq$ Teorema de Stokes

Se S é uma superfície plana, pertence ao plano xy, e tem orientação para cima, então o vetor normal unitário é $\mathbf{k}$. Neste caso, o teorema de Stokes afirma que

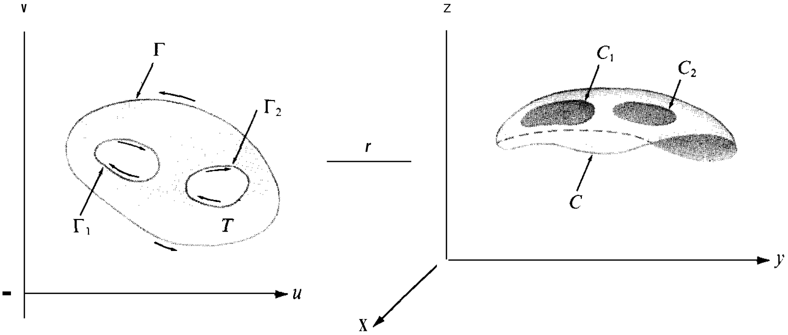
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{rot}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

que é exatamente o teorema de Green. Portanto, o teorema de Green pode ser visto como um caso especial do teorema de Stokes!

Extensão do Teorema de Stokes

O teorema de Stokes pode ser estendido para superfícies simples e suaves mais gerais.

Especificamente, considere uma região multiplamente conexa T tal como ilustrado na figura:



(Figura extraída do livro do Apostol, Calculus, vol 2.)

A superfície S, obtida por uma transformação bijetora $\mathbf{r} : T \to S$, terá o mesmo número de buracos que T.

Sobretudo, usando os mesmos argumentos da demostração anterior mas com o teorema de Green para regiões multiplamente conexas, concluímos que

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha + \sum_i \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\alpha_i,$$

em que todas as curvas são todas percorridas no sentido positivo. Aqui, C denota a curva na fronteira externa de S e C_i denota a curva numa fronteira interna (buracos) de S.

Cuidado: O sinal no somatório no termo do lado direito pode aparecer com sinal negativo dependendo da orientação da curva C_i na fronteira de um buraco.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o teorema de Stokes, que estabelece uma relação entre a integral de superfície do rotacional de $\mathbf{F}$ com a integral de linha de $\mathbf{F}$ na curva fronteira da superfície.

Apresentamos a demostração desse resultado e destacamos que ele pode ser estendido para regiões mais geral.

Em particular, mostramos que o teorema de Stokes generaliza o teorema de Green.

Muito grato pela atenção!