Cálculo II (Cursão)

Aula 23 – Rotacional e Divergente.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula de hoje focaremos nossa atenção em duas operações, chamadas **rotacional** e **divergente**.

Tanto o rotacional como o divergente são operações essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos, eletricidade e magnetismo, entre outras áreas.

Em termos gerais, o rotacional e o divergente lembram a derivada mas produzem, respectivamente, um campo vetorial e um campo escalar.

Ambas operações são descritas em termos do operador diferencial ∇.

Operador Diferencial e o Vetor Gradiente

Definição 1 (Operador Diferencial)

O operador diferencial é definido como:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Exemplo 2 (Vetor Gradiente)

O vetor gradiente é obtido aplicando o operador diferencial ∇ num campo escalar f, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Definição 3 (Rotacional)

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então o rotacional de $\mathbf{F}$, denotado por rot $\mathbf{F}$, é o campo vetorial dado pelo produto vetorial do operador diferencial com $\mathbf{F}$, ou seja,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Em outras palavras,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Definição 4 (Divergente)

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então o divergente de $\mathbf{F}$, denotado por div $\mathbf{F}$, é o campo escalar dado pelo produto escalar do operador diferencial com $\mathbf{F}$, ou seja,

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

Exemplo 5

Determine o rotacional e o divergente de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + z^2 \operatorname{sen} y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k}.$$

Exemplo 5

Determine o rotacional e o divergente de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + z^2 \operatorname{sen} y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k}.$$

Resposta: O divergente é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = y^2z^2 + z^2 \cos y.$$

O rotacional é

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (x^2e^y - 2z \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (2xy^2z - 2xe^y)\mathbf{j} - 2xyz^2\mathbf{k}.$$

Algumas Propriedades do Rotacional

O rotacional e o divergente satisfazem propriedades semelhantes à derivada. Por exemplo:

- **Linearidade**: Se a e b são constantes, então:

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$$
$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}.$$

- **Produto:** Se φ é um campo escalar, então

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{F}),$$
$$\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi(\nabla \times \mathbf{F}).$$

Apesar dessas similaridades com a derivada, é preciso tomar um certo cuidado com a manipulação dos símbolos diferenciando vetores e escalares!

Teorema 6

Se a matriz Jacobiana de um campo vetorial $\mathbf{F}$ *diferenciável em* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *é simétrica, então o rotacional é o vetor nulo em* S*, ou seja,*

$$rot\,(\mathbf{F}) = \mathbf{0}.$$

Teorema 7

Se f *é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então o rotacional do gradiente de* f *é o vetor nulo, ou seja,*

$$rot\,(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Lembre-se que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo se $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f. Logo, vale o corolário:

Corolário 8

Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, então rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Desse modo, se rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ não é um campo vetorial conservativo.

Exemplo 9

O campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + z^2 \operatorname{sen} y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k},$$

do Exemplo 5 não é conservativo porque

$$\text{rot } \mathbf{F} = (x^2e^y - 2z \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (2xy^2z - 2xe^y)\mathbf{j} - 2xyz^2\mathbf{k},$$

é diferente do vetor nulo.

A recíproca do Teorema 7 pode ser enunciada da seguinte forma:

Teorema 10

Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ *um campo vetorial de classe* $\mathcal{C}^1$ *em um conjunto aberto e convexo* $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$*, isto é,* P *,*Q *e* R *têm derivadas parciais contínuas em* S*. Se*

$$rot\ \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

então $\mathbf{F}$ *é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe um campo escalar* f *tal que* $\nabla f = \mathbf{F}$*.*

Exemplo 11

Seja $S = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e considere o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad \forall (x,y,z) \in S.$$

A matriz Jacobiana de $\mathbb{F}$,

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

é simétrica e, portanto, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em S. Contudo, sabemos que $\mathbf{F}$ não é conservativo em S. Esse fato não contradiz o teorema anterior porque S não é convexo.

Teorema 12

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *é um campo vetorial cujas componentes* P, Q *e* R *têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas em* $S \subseteq \mathbb{R}^3$, *então*

$$\textit{div rot}\, \mathbf{F} = 0.$$

Demonstração.

Pela definição de divergente e rotacional, temos que

$$\begin{aligned}
\text{div rot}\, \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0,
\end{aligned}$$

pelo teorema de Clairaut. $\square$

Exemplo 13

O campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + z^2 \operatorname{sen} y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k},$$

do Exemplo 5 não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial porque div $\mathbf{F} \neq 0$. Com efeito, se existisse $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, então div $\mathbf{F} = \text{div } (\text{rot } \mathbf{G}) = 0$.

O teorema abaixo pode ser visto como a recíproca do Teorema 12:

Teorema 14

Seja $\mathbf{F}$ *um campo vetorial de classe* C^1 *no interior de um paralelepípedo* $S \subseteq \mathbb{R}^3$*. Existe um campo vetorial* $\mathbf{G}$ *tal que rot* $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ *se, e somente se, div* $\mathbf{F} = 0$ *em todo ponto* $(x, y, z) \in S$*.*

Definição 15

Uma solenoidal é um campo vetorial $\mathbf{F}$ tal que div $\mathbf{F} = 0$.

O teorema anterior afirma que uma solenoidal no interior de um paralelepípedo é o rotacional de algum campo vetorial. Esse resultado, porém, não é válido para regiões arbitrárias.

Um exemplo é apresentado na Aula 25.

O divergente do vetor gradiente de uma função de três variáveis f é

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Definição 16 (Operador e Equação de Laplace)

O operador de Laplace ou laplaciano, denotado por ∇^2, para funções de três variáveis é

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

A equação de Laplace é

$$\nabla^2 f = 0 \quad \text{ou seja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o conceito de divergente e rotacional, denotados e definidos respectivamente por

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F},$$

que são operações que envolvem as derivadas parciais das componentes de um campo vetorial $\mathbf{F}$.

Destacamos que o rotacional de um campo vetorial conservativo é nulo. Reciprocamente, se o rotacional é nulo e suas derivadas parciais são continuamente diferenciais em um conjunto aberto e convexo, então um campo vetorial $\mathbf{F}$ é conservativo.

Por fim, destacamos div $\mathbf{F} = 0$ é necessário para $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$.

Muito grato pela atenção!